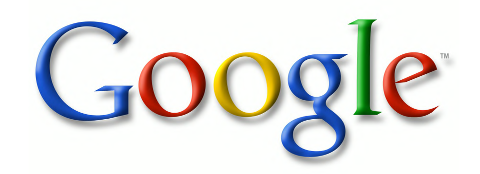


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

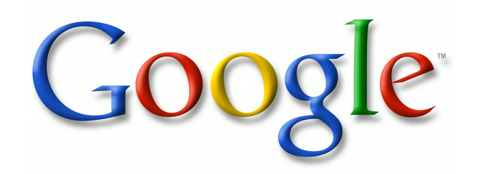
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

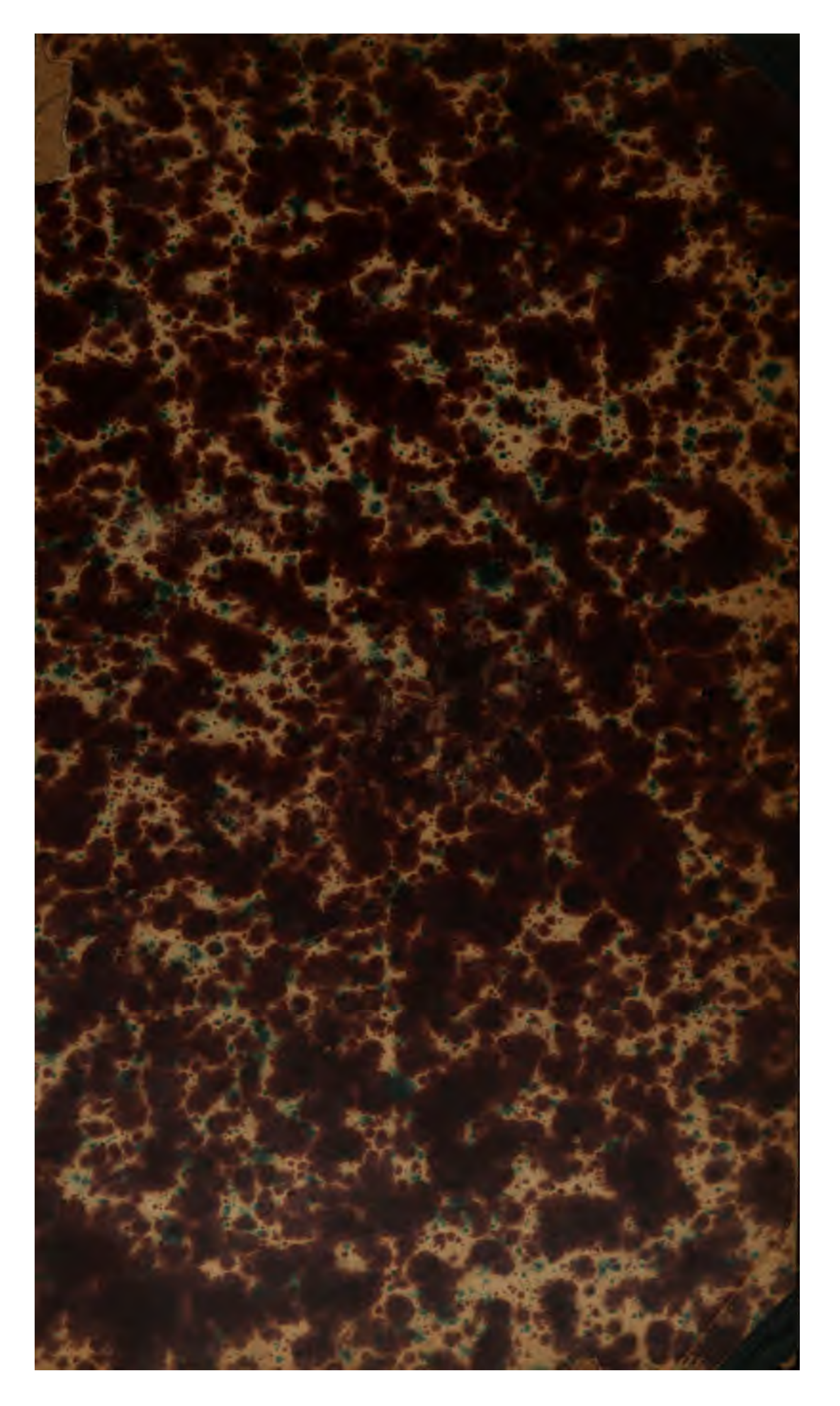
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

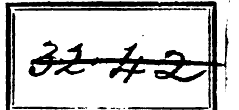
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

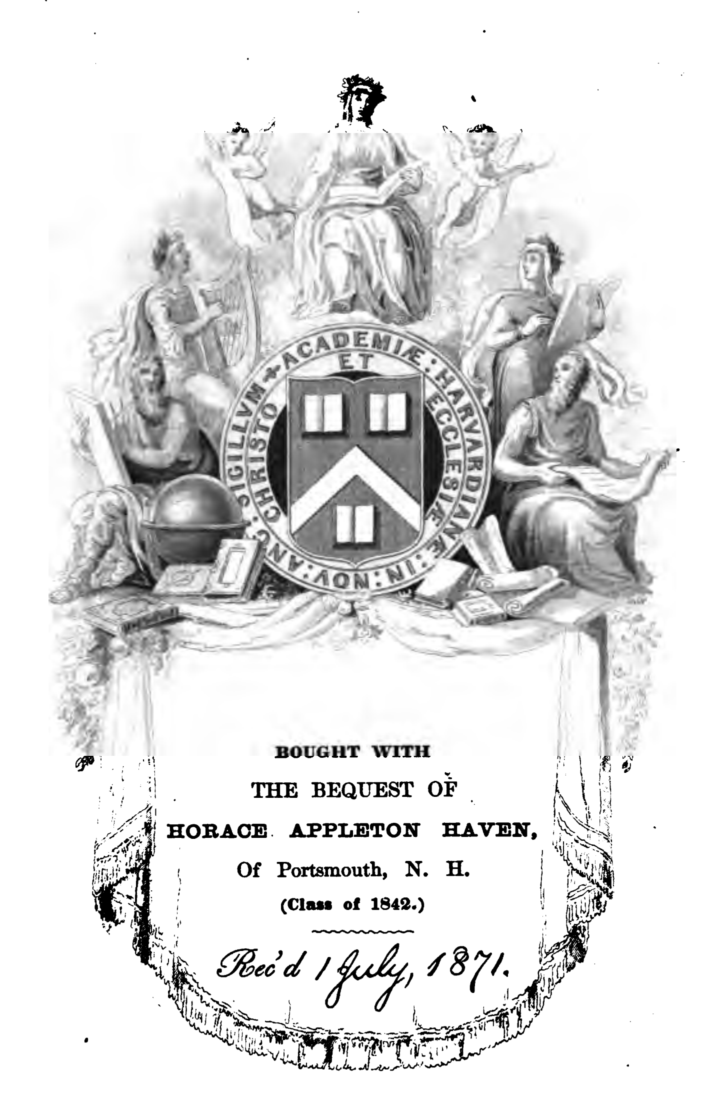
Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.





SCIENCE CENTER LIBRARY

Math 5158.69.4



BOUGHT WITH
THE BEQUEST OF
HORACE APPLETON HAVEN,
Of Portsmouth, N. H.
(Class of 1842.)

Rec'd 1 July, 1871.

Theorie

der mehrdeutigen

geometrischen Elementargebilde.

Theorie

der mehrdeutigen

geometrischen Elementargebilde

und der

algebraischen Curven und Flächen

als deren Erzeugnisse.

Von

Dr. Emil Weyr,

Assistenten der Mathematik am k. deutschen polytechnischen Institute zu Prag.

Mit 5 Figurentafeln.



Leipzig,

Druck und Verlag von B. G. Teubner.

C. 1869.

Math 5158.69.4

1871, July 1.
Haven Fund.

Meinem lieben Vater.



Vorwort.

Mit vorliegender Arbeit hat es der Verfasser versucht, in der Theorie der geometrischen Elementargebilde (Punktreihe, Strahlenbüschel[1]) und deren Erzeugnisse einen Schritt weiter zu thun. Der Verfasser übergiebt hiermit den ersten und zweiten Theil seiner diessbezüglichen Untersuchungen der Oeffentlichkeit. Der erste Theil enthält die Theorie einzweideutiger Elementargebilde, während der zweite Theil deren Erzeugnisse d. i. die Curven dritter Ordnung oder Classe behandelt. Soviel dem Verfasser bekannt ist, wurde der Gedanke mehrdeutiger Gebilde nicht in der Art durchgeführt und verwerthet, wie diess bei projektivischen Gebilden der Fall ist. Die Letzteren beschäftigen schon seit geraumer Zeit die Geometer und haben insbesondere eine vollständige Theorie der Kegelschnittslinien begründet. Unter projektivischen Punktreihen und Strahlenbüscheln versteht man solche geometrisch verwandte Gebilde, bei welchen jedem Elemente (Punkt, Strahl) des Einen ein einziges Element des Anderen entspricht. Denkt man sich zwei solche Gebilde als von einander wechselseitig abhängige Funktionen und ihre einzelnen Elemente als Funktionswerthe, so könnte man zwei projektivische Gebilde wohl auch zwei „ein-eindeutige Gebilde“ nennen.

Denkt man sich nun zwei Gebilde derart, dass jedem Elemente des Einen ein Elementenpaar des Anderen entspricht, während jedem

[1]) Selbstverständlich kann man auch die Ebenenbüschel als mitbetrachtet ansehen, da sie sich auf Strahlenbüschel zurückführen lassen. Es wird von ihnen desshalb nicht gehandelt, weil sich alle über Strahlenbüschel gewonnenen Sätze in unveränderter Form auf Ebenenbüschel übertragen lassen. Ich hoffe in den folgenden Publikationen und zwar in jenen, welche von den Regelflächen dritten Grades handeln sollen, auf Ebenenbüschel insbesondere zurückzukommen.

Der Verfasser.

Elemente des Letzteren nur ein einziges Element des Ersteren entspricht, so gelangt man zu geometrisch verwandten Gebilden, welche man in analoger Weise zwei ein-zweideutige Gebilde nennen kann.

Die Theorie solcher Gebilde zu entwickeln soll der Gegenstand des ersten Theiles sein.

Was den zweiten Theil betrifft, so enthält er die, sich aus dem ersten Theil als dessen Anwendung ergebende geometrisch-construktive Theorie der Curven dritter Ordnung vierter Classe, dritter Classe vierter Ordnung und jener der dritten Ordnung und Classe. Der dritte Theil, welcher diesen beiden so bald als möglich nachfolgen soll, wird die Theorie der cubischen Regelflächen, die Construktion algebraischer Funktionen des dritten Grades und die graphische Lösung der cubischen Gleichungen enthalten. Hiermit wäre die Anwendung der ein- zweideutigen Gebilde abgeschlossen und es gedenkt dann der Verfasser zu den ein-dreideutigen und allgemein ein-n-deutigen Gebilden und deren Erzeugnissen zu schreiten.

Da in der ganzen Arbeit die construktive Richtung festgehalten werden soll, so sind dem ersten Theile drei, und dem zweiten Theile zwei Figurentafeln beigegeben.

Die Anordnung und Durchführung derselben wird gewiss allgemein zufriedenstellen und ich fühle mich verpflichtet, meinem geehrten Freunde Herrn Carl Pelz für deren freundschaftlichste Anfertigung meinen innigsten Dank auszusprechen. Ich danke um so wärmer, als Herr Pelz, weil mit dem Gegenstande vollkommen vertraut, sozusagen der Einzige war, von welchem ich eine korrekte und rasche Durchführung erwarten konnte, welche die Veröffentlichung des Werkchens wesentlich beschleunigte.

Prag im Juli 1869.

Der Verfasser.

Inhalt.

I. Theil.

II. Theil.

Erster Theil.

Theorie ein-zwei-deutiger geometrischer Elementar-Gebilde.

Mit Figurentafeln I—III.

I. Entwickelung der allgemeinen Beziehungen.

1. In der Geometrie der Ebene treten zwei elementare Grundgebilde: „die Punktreihe und das Strahlenbüschel" als Erzeuger der anderen höheren Gebilde auf.

Die Elemente der Reihe sind Punkte und jene des Büschels sind Strahlen. Punkt und Strahl sind reciproke Elemente. Zwei Punkte erzeugen einen Strahl — ihre Verbindungsgerade — und zwei Strahlen erzeugen einen Punkt — ihren Durchschnittspunkt.

Entsprechend den beiden reciproken Elementen: Punkt und Strahl findet man in der Ebene zweierlei u. z. wieder reciproke Gebilde höherer Natur. Es sind diess die Enveloppen und die Oerter.

Bewegt sich ein Strahl nach einem gewissen Gesetze, so erzeugt er eine Enveloppe o. Umhüllungscurve, während ein, sich gesetzmässig bewegender Punkt eine Ortscurve erzeugt.

Wir bezeichnen demgemäss den Strahl als das erzeugende Element der Enveloppen, und den Punkt als das erzeugende Element der Ortscurven.

Je zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Lagen des eine Ortscurve beschreibenden Punktes erzeugen einen Strahl — die Tangente der Curve im erzeugenden Punkte — und je zwei aufeinanderfolgende Lagen des eine Enveloppe erzeugenden Strahles erzeugen einen Punkt — den Berührungspunkt der Curve mit dem bezeichneten Strahle.

Jedem Punkte einer Ortscurve ist daher ein Strahl — seine Tangente — und jedem Strahle einer Enveloppe ist ein Punkt — sein Berührungspunkt — beigeordnet. Man kann mithin jede Ortscurve als Enveloppe und jede Enveloppe als Ortscurve betrachten.

Fasst man beide Gebildearten unter dem Ausdruck: „Curve" zusammen, so kann man sagen, dass die Natur einer Curve eine verschiedene sei, je nachdem man sie als Ort oder als Enveloppe betrachtet.

Die beigeordneten Elemente einer Ortscurve sind die Tangenten ihrer Punkte, und die beigeordneten Elemente einer Enveloppe sind die Berührungspunkte ihrer Strahlen.

Die einfachste Ortscurve ist eine Gerade, und die einfachste Enveloppe ist ein Punkt.

Diese Curven sind die Elemente zur Erzeugung der Curven höherer Ordnungen.

Das eine Curve erzeugende Element (bei der Ortscurve den sie beschreibenden Punkt und bei einer Enveloppe den sie einhüllenden Strahl) kann man sich wieder durch zwei reciproke Elemente erzeugt denken.

Man gelangt so zu der Erzeugung von Ortscurven durch Strahlenbüschel und zu der Erzeugung der Enveloppen durch Punktreihen. Zwei solche gleichartige Gebilde, also zwei Büschel oder zwei Punktreihen, kann man derart auf einander beziehen, dass einem Elemente des einen Gebildes ein oder mehrere Elemente des anderen Gebildes entsprechen. Bewegt man dann ein Element so, dass es allezeit ein Erzeugniss von zwei entsprechenden Elementen beider Gebilde bleibt, so erzeugt es eine Curve, weil sein Lauf ein gesetzmässig bestimmter ist. Zwei so aufeinander bezogene Büschel erzeugen als ihren Durchschnitt eine Ortscurve, deren Punkte die Schnittpunkte entsprechender Strahlen sind, und zwei so aufeinander bezogenen Reihen erzeugen eine Enveloppe, deren Strahlen die Verbindungslinien entsprechender Punkte sind. Um auf diese Weise eine Curve zu erzeugen, ist es nöthig zu untersuchen, wie am vortheilhaftesten zwei gleichartige Gebilde auf einander in obiger Weise bezogen werden können.

Um eine Beziehung zwischen den Elementen zweier Gebilde in algebraischer Art feststellen zu können, muss man im Stande sein, einzelne Elemente eines Gebildes analytisch zu fixiren.

Diess geschieht am vortheilhaftesten mittelst des Theilverhältnisses. Sind nämlich a und b zwei feste Elemente eines Gebildes, x ein veränderliches Element dieses Gebildes, so versteht man unter dem Theilverhältniss ξ dieses Elementes x bei einer Punktreihe den Quotienten $\xi = \frac{a\,x}{b\,x}$, und bei einem Strahlenbüschel den Quotient $\xi = \frac{\sin a\hat{}x}{\sin b\hat{}x}$.

Hat man nun zwei Gebilde G und G', in beiden die festen Elementenpaare a, b und a', b', auf welche man mittelst des Theilverhältnisses die beweglichen Elemente der betreffenden Gebilde bezieht, und sind ξ, ξ' die Theilverhältnisse zweier Elemente x und x' der beiden Elemente G und G'; so kann man solche zwei Elemente der beiden Gebilde als einander entsprechend bezeichnen, welche einer vorgelegten, sonst willkührlichen Gleichung $f(\xi, \xi') = 0$ zwischen den beiden Theilverhältnissen genügen.

Wird ein Element des einen Gebildes, z. B. x in G angenommen, so liefert die Gleichung $f(\xi, \xi') = 0$ (welche wir die Verwandtschaftsgleichung nennen könnten), wenn man statt ξ das Theilverhältniss von x einsetzt und die Gleichung nach ξ' auflöst, die Theilverhältnisse der, dem Element x entsprechenden Elemente des Gebildes G'.

2. Die einfachste Verwandtschaftsart zweier Gebilde, welche auch bisher ausschliesslich und mit so herrlichen Erfolgen von den Geometern betrachtet wurde, ist die Verwandtschaft der Projectivität. Zwei verwandte Gebilde von solcher Beschaffenheit, dass jedem Elemente des einen ein und nur ein einziges Element des anderen und umgekehrt entspricht, heissen projectivisch.

Die Verwandtschaftsgleichung zweier projectivischen Gebilde muss daher in beiden Variabeln vom ersten Grade sein und wird demnach die Form:

$$\xi \xi' + a \xi + a' \xi' + b = 0$$

besitzen.

Sie enthält drei Constanten a, a', b, welche durch ebensoviele Paare entsprechender Elemente eliminirt werden können. Desshalb sind zwei projectivische Gebilde durch drei Paare entsprechender Elemente bestimmt, und kann man zwischen vier Paaren entsprechender Elemente eine von der besonderen Anordnung der Elemente unabhängige Relation herstellen.

Diese Relation ist die Doppelverhältnissgleichheit. Sind die beiden projectivischen Gebilde auf demselben Träger, also zwei Büschel mit demselben Scheitel oder zwei Punktreihen auf derselben Geraden, so kann man die beiden Theilverhältnisse auf dasselbe Grundelementenpaar beziehen und dann die Frage aufwerfen, wie vielemal ein Element des einen Gebildes mit seinem entsprechenden zusammenfällt, oder wie viel Doppelelemente in zwei projectivischen Gebilden desselben Trägers existiren. Die Antwort wird durch die Substitution $\xi = \xi'$ in die Verwandtschaftsgleichung erhalten. Man erhält durch diese Substitution eine quadratische Gleichung für ξ, zum Zeichen, dass zwei solche Gebilde zwei Doppelelemente besitzen, welche reell oder imaginär sein können.

3. Zwei projectivische Grundgebilde von derselben Art können eine doppelte Lage in der Ebene besitzen. Es sind diess die beiden Lagenarten, welche man als die perspectivische und die projectivische bezeichnet.

Zwei Gebilde sind in perspectivischer Lage, wenn sich zwei entsprechende Elemente in dem, beiden Gebilden gemeinschaftlichen Elemente decken.

Zwei Punktreihen sind perspectivisch, wenn in ihrem Schnittpunkte ein Paar entsprechender Punkte vereinigt sind. Dann gehen bekanntlich die Verbindungslinien entsprechender Punkte durch einen und denselben Punkt — das perspectivische Centrum beider Reihen.

Zwei Büschel sind perspectivisch, wenn in der Verbindungslinie ihrer Scheitel ein Paar entsprechender Strahlen zusammenfallen. Dann

schneiden sich bekanntlich entsprechende Strahlen in Punkten einer Geraden — des perspectivischen Durchschnitts beider Büschel.

Zwei Gebilde, welche nicht perspectivisch liegen, sind projectivisch gelegen. Um zwei perspectivische Gebilde vervollständigen zu können, bedient man sich des perspectivischen Centrums oder Durchschnittes derselben, und führt die Vervollständigung projectivisch liegender Gebilde auf jene der perspectivisch liegenden in bekannter Art und Weise zurück.

Man erhält so die Theorie des Directionscentrums projectivischer Büschel und der Directionsaxe projectivischer Punktreihen.

Schliesslich sei noch erwähnt, dass man von den projectivischen Gebilden unmittelbar zur Theorie der Curven zweiter Ordnung und zweiter Classe, der Kegelschnitte, gelangt und dass deren elegante Construction durch die Sätze von Pascal und Brianchon nur eine symetrische Ausdrucksweise der Vervollständigung projectivischer Strahlenbüschel und Punktreihen ist.

4. Wenn man von den projectivischen Gebilden, welche man auch als die „ein-ein-deutigen Gebilde“ bezeichnen könnte und welche die einfachste Natur geometrischer Verwandtschaft aufweisen, höher hinaufsteigt, so gelangt man consequenterweise zu denjenigen verwandten Gebilden, welche wir als die „ein-zwei-deutigen Gebilde“ bezeichnen wollen.

„Zwei Gebilde G' und G'' sind in ein-zwei-deutiger Beziehung, oder sie sind ein-zwei-deutige Gebilde, wenn einem Elemente x' des einen Gebildes G' zwei Elemente x_1'' und x_2'' des anderen Gebildes entsprechen, aber jedem Elemente x_1'' des Gebildes G'' nur das einzige Element x' des Gebildes G' entspricht.“

Das Gebilde G' nennen wir dann das eindeutige und das Gebilde G'' das zweideutige Gebilde.

In der That kann man jedes Gebilde als eine Art von Funktion betrachten und seine Elemente als Funktionswerthe. Dann ist jedes der beiden Gebilde G' und G'' eine Funktion des anderen, weil jedem Elemente des einen ein oder zwei Elemente des anderen entsprechen.

Es ist nun in dieser Auffassungsweise G'' eine zweideutige Funktion, weil jedem Werthe von G' zwei Werthe von G'' entsprechen, und G' ist eine eindeutige Funktion, weil jedem Werthe von G'' nur ein Werth von G' angehört.

Desshalb habe ich die bei Funktionen übliche Benennung auf geometrische Gebilde angewandt und, wie sich später zeigen wird, die Anwendung auch weiter durchgeführt.

Bezeichnen wir das Theilverhältniss eines Elementes des eindeutigen Gebildes G' mit ξ' und jedes des entsprechenden Elementes im zweideutigen Gebilde G'' mit ξ'', so muss die Verwandtschaftsgleichung

$f(\xi', \xi'') = 0$ von der Art sein, dass einem Werthe von ξ'' nur ein ξ', aber jedem Werthe von ξ' zwei Werthe von ξ'' z. B. ξ_1'' und ξ_2'' entsprechen. Die Verwandtschaftsgleichung muss daher in ξ' von erstem Grade und in ξ'' von zweitem Grade sein, und wird die allgemeine Form:

$$\xi' (a_0 \xi''^2 + a_1 \xi'' + a_2) + (b_0 \xi''^2 + b_1 \xi'' + b_2) = 0$$

besitzen.

Die Doppeldeutigkeit des Gebildes G'' ist aus der Verwandtschaftsgleichung ungemein leicht abzusehen. Ist nämlich x' ein Element des Gebildes G', welchem das Theilverhältniss ξ' zukommt, so liefert die Gleichung, wenn man statt ξ' diesen particulären Werth einsetzt, zwei Wurzeln ξ_1'' ξ_2'', welche die Theilverhältnisse der beiden dem Punkte x' entsprechenden Punkte x_1'' x_2'' sind.

5. Die Verwandtschaftsgleichung der einzweideutigen Gebilde enthält, wie ihre Form unmittelbar lehrt, fünf unabhängige Constanten, nämlich die Verhältnisse von fünfen der Grössen $a_0\, a_1\, a_2\, b_0\, b_1\, b_2$ zur sechsten. Wenn diese fünf Verhältnisse bekannt sind, so kann man die Verwandtschaftsgleichung aufstellen und zu jedem Elemente des einen Gebildes die Entsprechenden des anderen Gebildes bestimmen.

Die beiden Gebilde können also dann vervollständigt werden — sie sind bestimmt.

Es ist nun für die geometrische, also constructive Betrachtungsweise nöthig, die Verwandtschaftsgleichung und somit die fünf Constanten zu umgehen und zu trachten, die beiden ein-zwei-deutigen Gebilde auf rein geometrische Weise zu bestimmen. Diess wird selbstverständlich durch Angabe von Paaren entsprechender Elemente ebenso geschehen, wie bei den projectivischen oder ein-ein-deutigen Gebilden.

Es frägt sich daher zunächst: „wie viel Paare entsprechender Elemente sind zur Bestimmung der beiden einzweideutigen Gebilde G' und G'' nothwendig und hinreichend?“ Die Antwort auf diese Frage ist leicht gefunden.

Kennt man ein Paar x' x'' von entsprechenden Elementen, so kennt man auch deren Theilverhältnisse ξ' und ξ'', und weiss, dass diese in die Verwandtschaftsgleichung eingesetzt dieselbe erfüllen müssen. Führ man diese Substitution wirklich aus, so erhält man eine Bedingungsgleichung zwischen den fünf unabhängigen Constanten, in welcher dieselben linear vorkommen.

Man wird also so viel Elementenpaare benöthigen, als Gleichungen nöthig sind, um fünf Unbekannte zu bestimmen — also fünf.

„Zwei ein-zwei-deutige Gebilde sind vollkommen bestimmt, wenn fünf Paare entsprechender Elemente bekannt sind; man kann dann zu jedem sechsten Elemente die entsprechenden construiren.“

6. Nachdem wir erkannt haben, dass zwei einzweideutige Ge-

bilde durch fünf Paare entsprechender Elemente bestimmt sind, erübrigt noch zu bemerken, dass sich eine allgemeine von der besonderen Anordnung der Gebilde unabhängige Relation angeben lässt, welche eine Beziehung zwischen sechs Paaren entsprechender Elemente ausdrückt.

Diese Relation entspringt aus der Elimination der Constanten in der Verwandtschaftsgleichung. Nimmt man sechs Paar entsprechender Elemente und setzt ihre Theilverhältnisse, wie sie einander paarweise zugehören, in die Verwandtschaftsgleichung, so erhält man sechs Gleichungen, aus welchen sich die sechs Grössen $a_0\ a_1\ a_2\ b_0\ b_1\ b_2$ eliminiren lassen. Das Eliminationsresultat, welches durch das Verschwinden einer Determinante ausgedrückt wird, enthält dann die Beziehung zwischen den sechs Paaren entsprechender Elemente.

7. Der Natur der zwischen den einzweideutigen Gebilden G' und G'' bestehenden Beziehung nach, entspricht jedem Elemente x' des Gebildes G' ein Elementenpaar $x_1''\ x_2''$ des zweideutigen Gebildes G''. Das Elementenpaar kann ebensowohl reell, als auch imaginär sein. Zwischen beiden Fällen liegt jener des Zusammenfallens. Es kann nämlich im eindeutigen Gebilde solche Elemente geben, deren im zweideutigen Gebilde entsprechende Elemente in ein einziges zusammenfallen. Wie vielmal diess bei einzweideutigen Gebilden im Allgemeinen vorkommt, wollen wir nun untersuchen.

Gehen wir zur Verwandtschaftsgleichung:

$$\xi'\,(a_0\,\xi''^2 + a_1\,\xi'' + a_2) + (b_0\,\xi''^2 + b_1\,\xi'' + b_2) = 0$$

zurück, so kommt unsere Frage darauf hinaus, zu untersuchen, wie viel Werthe von ξ' es giebt, welche die quadratische Gleichung für ξ'' zu einer solchen machen, die gleiche Wurzeln besitzt oder, was dasselbe ist, welche den linken Theil der Verwandtschaftsgleichung zu einem vollständigen Quadrate machen. Die Bedingung, dass die quadratische Gleichung in ξ'' gleiche Wurzeln besitze, ist das Verschwinden der Diskriminante.

Nun ist die Diskriminante in ξ' vom zweiten Grade und man erhält somit zwei Werthe für ξ' und dem entsprechend zwei Elemente des eindeutigen Gebildes G', deren entsprechende Elementenpaare im zweideutigen Gebilde in ein einziges Element zusammenfallen.

Es wird diess durch das Nachfolgende etwas klarer werden.

Ordnet man die Verwandtschaftsgleichung nach den Potenzen von ξ'', so hat mun

$$\xi''^2\,(a_0\,\xi' + b_0) + \xi''\,(a_1\,\xi' + b_1) + (a_2\,\xi' + b_2) = 0$$

und daraus

$$\xi'' = \frac{-(a_1\,\xi' + b_1) \pm \sqrt{(a_1\,\xi' + b_1)^2 - 4\,(a_0\,\xi' + b_0)\,(a_2\,\xi' + b_2)}}{2\,(a_0\,\xi' + b_0)}.$$

Sollen nun die beiden dem ξ' entsprechenden Werthe von ξ'

zusammenfallen, so muss die Wurzelgrösse rechts verschwinden, und man erhält für ξ' die quadratische Gleichung:

$$(a_1 \xi' + b_1)^2 - 4 (a_0 \xi' + b_0)(a_2 \xi' + b_2) = 0$$

deren linke Theil nichts anderes als die erwähnte Diskriminante ist.

Die zwei Wurzeln dieser quadratischen Gleichung wollen wir mit ν und ω bezeichnen. Es sind also ν und ω die Theilverhältnisse jener Elemente v' w' des eindeutigen Gebildes G', deren entsprechende Elemente v_1'' v_2'', w_1'' w_2'' zusammenfallen. Die Elemente v_1'' v_2'', welche dem Elemente v' entsprechen, fallen zusammen und sollen demgemäss mit v_{12}'', und ebenso die dem w' entsprechenden zusammenfallenden Elemente mit w_{12}'' bezeichnet werden.

Die beiden Elemente v_{12}'' und w_{12}'', deren jedes eigentlich doppelt zu zählen ist, weil es ein Elementenpaar vorstellt, mögen „die Doppelelemente des zweideutigen Gebildes“ heissen, während die Elemente v' und w', denen sie entsprechen, „die Verzweigungselemente des eindeutigen Gebildes“ heissen sollen.

„Das eindeutige Gebilde von zwei in ein-zwei-deutiger Beziehung stehenden Gebilden enthält zwei Verzweigungselemente, denen im zweideutigen Gebilde die doppelt zu zählenden Doppelelemente entsprechen.“

Es ist wohl nicht nöthig, zu beweisen, dass die Verzweigungselemente gleichzeitig mit den Doppelelementen reell oder imaginär sind.

8. Jenachdem die Verzweigungselemente und die Doppelelemente reell oder imaginär sind, weiset das zweideutige Gebilde G'' ein doppeltes Verhalten auf.

Jedem Elemente x' des eindeutigen Gebildes G' entspricht ein reelles oder imaginäres Elementenpaar x_1'' x_2'' des zweideutigen Gebildes G''.

Ist nun die Verwandtschaft derart, dass es auf G' ebensowohl Elemente gibt, denen reelle, als auch solche, denen imaginäre Elementenpaare auf G'' entsprechen, so müssen die Doppelemente von G'' und somit auch die Verzweigungselemente von G' reell sein, weil sie eben den Uebergang von der einen Art der Elemente zu der anderen bilden.

Sind dagegen die Doppelelemente in G'', also auch die Verzweigungselemente von G' imaginär, so gibt es — falls die Beziehung reell ist, d. h. falls die Coëfizienten der Verwandtschaftsgleichung reell sind — auf G' keine Elemente, denen in G'' imaginäre Elementenpaare entsprächen; und somit gibt es in G'' überhaupt keine imaginären Elementenpaare. Wir sagen nun in dem Falle, als es in G' Elemente gibt, deren entsprechende Elementenpaare in G'' imaginär sind, „das Gebilde G'' sei complex“, während wir es „reell“ nennen, wenn es auf G' solche Elemente nicht gibt.

Dann leuchtet sofort die Richtigkeit des folgendes Satzes ein:

„Ist das zweideutige Gebilde von zwei in ein-zwei-deutiger Beziehung stehenden Gebilden complex, so sind die Doppelelemente desselben und die Verzweigungselemente des eindeutigen Gebildes reell; ist dagegen das zweideutige Gebilde reell, so sind die Doppelelemente, sowie die Verzweigungselemente imaginär."

Wenn das zweideutige Gebilde complex ist, so wird das eindeutige Gebilde durch die Verzweigungselemente in zwei Partieen getheilt. Den Elementen der einen Partie entsprechen reelle und jenen der anderen Partie imaginäre Elementenpaare im zweideutigen Gebilde.

9. Bisher haben wir die beiden Gebilde in beliebiger Lage vorausgesetzt. Es ist nun für uns wichtig, den Fall zu untersuchen, wenn diese beiden Gebilde denselben Träger besitzen. Es wird in diesem Falle geschehen können — und im Allgemeinen auch immer geschehen — dass Elemente mit ihren entsprechenden Elementen zusammenfallen. Solche Elemente nennen wir dann „Doppelelemente beider Gebilde." Wenn also ein Element x' des eindeutigen Gebildes G' mit einem der beiden ihm entsprechenden Elemente, z. B. x_1'' zusammenfällt, so bilden $x'\,x_1''$ ein Doppelelement beider Gebilde. Um die Frage nach solchen Doppelelementen zu beantworten, benützen wir unsere Verwandtschaftsgleichung:

$$\xi'\,(a_0\,\xi''^2 + a_1\,\xi'' + a_2) + (b_0\,\xi''^2 + b_1\,\xi'' + b_2) = 0.$$

Die beiden Theilverhältnisse ξ' und ξ'' kann man in diesem Falle auf ein und dasselbe Grundelementenpaar beziehen. Ist nun x' ein Doppelelement, d. h. fällt es mit dem ihm entsprechenden Elemente x_1'' zusammen, so haben beide dasselbe Theilverhältniss und somit ergeben sich aus der Verwandtschaftsgleichung die Doppelelemente beider Gebilde, wenn man $\xi' = \xi''$, z. B. $= \xi$ setzt. Man erhält eine cubische Gleichung

$$\xi\,(a_0\,\xi^2 + a_1\,\xi + a_2) + (b_0\,\xi^2 + b_1\,\xi + b_2) = 0.$$

Die drei Wurzeln dieser cubischen Gleichung sind dann die Theilverhältnisse der drei Doppelelemente beider Gebilde.

„Zwei einzweideutige Gebilde auf demselben Träger besitzen drei Doppelelemente."

Wir machen auf den Unterschied aufmerksam zwischen „Doppelelemente zweier Gebilde" und „Doppelelemente eines Gebildes." Erstere können nur bei Gebilden mit demselben Träger auftreten und entstehen dadurch, dass ein Element mit einem seiner entsprechenden zusammenfällt, während letztere in jedem Gebilde existiren, wofern dasselbe mehr als eindeutig ist, und dadurch entstehen, dass zwei einem Element entsprechende Elemente zusammenfallen. Die Doppel-

elemente zweier ein-zwei-deutigen Gebilde auf demselben Träger werden bestimmt durch die Wurzeln der letzten cubischen Gleichung. Es können daher dem Verhalten der Wurzeln dieser Gleichung gemäss folgende Fälle eintreten:

1) Die drei Doppelelemente sind reell.
2) Zwei sind imaginär, das dritte reell.
3) Zwei fallen zusammen; dann muss das dritte reell sein.
4) Alle drei Doppelelemente fallen zusammen.

Die ersten zwei Fälle haben weiter keine besondere Wichtigkeit, indem sie nur der geometrische Ausdruck der Realität oder Nichtrealität der Wurzeln der cubischen Gleichung sind.

Betrachten wir den Fall, wenn zwei der Doppelelemente der beiden Gebilde zusammenfallen, so muss für diesen die Diskriminante der letzten Gleichung verschwinden, und wenn alle drei Doppelelemente zusammenfallen, so muss der linke Theil dieser Gleichung ein vollständiger Cubus sein.

Wir werden diese besonderen Fälle bei ihrer geometrischen Betrachtung näher und eingehender untersuchen. Hat man zwei einzweideutige Gebilde mit verschiedenen Trägern und vereinigt man sie durch eine Ortsveränderung auf demselben dritten Träger, so wird es im Allgemeinen dreimal geschehen, dass ein Element mit seinem entsprechenden zusammenfällt. Nun können zwei Fälle eintreten. Entweder fällt ein gewöhnliches Element mit seinem entsprechenden zusammen, oder es kann möglicherweise ein Verzweigungselement des eindeutigen Gebildes mit dem ihm entsprechenden Doppelelemente des zweiten Gebildes zusammenfallen. Es entsteht die Frage, ob in diesem zweiten Falle dieses Doppelelement beider Gebilde nicht als ein zweifaches zu betrachten ist, und also unter den Punkt 3) einzubegreifen wäre. Wir werden am betreffenden Orte diese Frage mit Nein beantworten müssen, indem wir erkennen werden, dass ein solches Doppelelement die Natur eines einfachen besitzt.

10. Solche einzweideutige Gebilde auf demselben Träger kann man leicht herstellen, wenn man von zwei beliebig liegenden solchen Gebilden aus einem und demselben Punkte den Schein nimmt, wenn es zwei Punktreihen sind — oder mit einer und derselben Transversale den Schnitt sucht, wenn es zwei Büschel sind. Schneidet man also zwei einzweideutige Büschel mit derselben Transversale, so sind die zwei entstandenen Punktreihen ebenfalls in ein-zweideutiger Beziehung; und projicirt man zwei ein-zwei-deutige Punktreihen durch Strahlen aus einem und demselben Punkte, so entstehen zwei einzweideutige concentrische Strahlenbüschel.

11. Es ist wichtig auf einen Umstand aufmerksam zu machen, welcher bei der Theorie einzweideutiger Gebilde auftritt, nämlich, dass

diese Theorie naturgemässer Weise jene der quadratischen Involutionen in sich enthält.

Den einzelnen Elementen des eindeutigen Gebildes G' entsprechen Elementenpaare des zweideutigen Gebildes G'', welche dann offenbar in ihrer Gesammtheit eine quadratische Involution bilden. Ein solches Elementenpaar ist nämlich bestimmt, sobald man eines seiner Elemente kennt. Denn wäre z. B. das Element x_1'', welches dem Element x' des eindeutigen Gebildes entspricht, bekannt, so ist auch x' und demnach auch das zweite dem x' entsprechende Element x_2'' bekannt, welches mit x_1'' ein Elementenpaar bildet. Die Vertauschungsfähigkeit, welche eine Haupteigenschaft der Involution ist, kann hier sofort erkannt werden und fliesst aus der Bemerkung, dass je ein Elementen**paar** des zweideutigen Gebildes einem Elemente des eindeutigen entspricht.

„Die sämmtlichen, den einzelnen Elementen des eindeutigen Gebildes entsrechenden Elementenpaare des zweideutigen Gebildes bilden eine quadratische Involution; die Doppelelemente dieser Involution sind die Doppelelemente des zweideutigen Gebildes und entsprechen den Verzweigungselementen des eindeutigen Gebildes.“

Aus der Theorie der Involutionen zweiten Grades, welche wir hier natürlich nicht entwickeln wollen, sondern in ihrer ganzen Ausdehnung als bekannt voraussetzen, folgt dann unmittelbar:

„Das einem Elemente des eindeutigen Gebildes entsprechende Elementenpaar im zweideutigen wird von dem Doppelelementenpaar harmonisch getheilt.“

Dieselben Ergebnisse fliessen aus der Verwandtschaftsgleichung. Betrachtet man nämlich das Theilverhältniss ξ' als einen veränderlichen Parameter, so ist unsere Verwandtschaftsgleichung nichts anderes als die Grundgleichung der quadratischen Involutionen. Wenn man das zweideutige Gebilde als eine Involution auffasst, was es auch wirklich ist, so entspricht jedem Elemente des eindeutigen Gebildes ein Elementenpaar der Involution oder die Involution ist mit dem eindeutigen Gebilde projectivisch.

„Zwei ein-zwei-deutige Gebilde repräsentiren eine Involution mit einem ihr projectivischen Gebilde.“

Es ist selbstverständlich, dass dann das Doppelverhältniss von irgend vier Elementen des eindeutigen Gebildes gleich ist dem Doppelverhältniss der entsprechenden vier Elementenpaare des zweideutigen Gebildes.

Das Doppelverhältniss von vier Paar Elementen des zweideutigen Gebildes ist das Doppelverhältniss der vier zu einem festen Elemente harmonischen Elemente bezüglich dieser Elementenpaare. Das feste Element ist dabei ganz willkührlich.

II. Erzeugnisse ein-zwei-deutiger Elementargebilde.

12. Sind zwei Gebilde $G' G''$ in einzweideutiger Beziehung, so erzeugen sie eine Curve. Ist nämlich x' ein Element des eindeutigen und $x_1'' x_2''$ die ihm entsprechenden Elemente des zweideutigen Gebildes, so erzeugt das Element x' mit jedem der Elemente x_1'' und x_2'' ein ihm reciprokes Element. Wenn also x', x_1'', x_2'' Punkte sind, so werden zwei Strahlen erzeugt und wenn x', x_1'', x_2'' Strahlen sind, so werden Punkte erzeugt. Diese erzeugten reciproken Elemente bilden nun in ihrer Gesammtheit eine Curve; eine Ortscurve, wenn die Gebilde Büschel sind, und eine Enveloppe, wenn die Gebilde Reihen sind.

Betrachten wir nun insbesondere zwei in einzweideutiger Beziehung stehende Strahlenbüschel G' und G''. G' soll das eindeutige und G'' das zweideutige Gebilde sein. Entsprechende Strahlen schneiden sich in Punkten der Ebene, welche in ihrer Gesammtheit eine Ortscurve bilden, deren Charakter wir nun näher untersuchen wollen. Die Ordnungszahl der Curve wird bekanntlich durch die Zahl der Schnittpunkte bestimmt, welche die Curve mit irgend einer Geraden T ihrer Ebene liefert. Nun bestimmen die beiden Büschel auf einer solchen Transversale nach Art. 10 zwei einzweideutige Punktreihen, welche drei Doppelpunkte besitzen. Diese Doppelpunkte sind solche Punkte, in denen sich entsprechende Strahlen beider Büschel durchschneiden, also drei Punkte der erzeugten Curve. Auf jeder Transversale liegen drei Punkte der Curve und sie ist daher von der dritten Ordnung.

Wenn von den drei auf der Transversale T erzeugten Doppelpunkten zwei zusammenfallen, so ist die Gerade T eine Tangente der Curve und die zusammenfallenden zwei Doppelpunkte geben ihren Berührungspunkt. Fallen alle drei Doppelpunkte auf T in einen einzigen Punkt zusammen, so ist T eine Inflexionstangente der Curve und dieser Punkt der Inflexionspunkt.

Nehmen wir den Fall an, dass die Transversale T durch den Scheitel des eindeutigen Büschels G' geht, so ist leicht einzusehen, dass der Scheitel für jede beliebige Lage der Transversale einer der drei Doppelpunkte ist, weil in ihm der gemeinschaftliche Strahl beider Büschel mit seinem entsprechenden zusammentrifft. Jeder durch den Scheitel des eindeutigen Büschels gehende Strahl schneidet also die Curve in diesem Scheitel und folglich ist dieser Scheitel ein Punkt der Curve.

Geht die Transversale T durch den Scheitel des zweideutigen Büschels, so fallen in diesem Scheitel zwei von den drei Doppelpunkten

zusammen, weil da der gemeinschaftliche Strahl beider Büschel mit seinen beiden entsprechenden zusammentrifft.

Jede durch den Scheitel des zweideutigen Büschels gehende Transversale schneidet also die Curve in diesem Scheitel in zwei zusammenfallenden Punkten, und folglich ist dieser Scheitel ein Doppelpunkt der Curve. Wir können also sagen:

„Der Durchschnitt zweier ein-zwei-deutigen Büschel ist eine Curve dritter Ordnung, welche im Scheitel des eindeutigen Büschels einen einfachen und im Scheitel des zweideutigen Büschels einen Doppelpunkt besitzt.“

Die analoge Betrachtung für einzweideutige Reihen liefert den Satz:

„Die Enveloppe zweier einzweideutigen Reihen (resp. der Verbindungslinien ihrer entsprechenden Punkte) ist eine Curve dritter Classe, welche den Träger der eindeutigen Reihe zu einer einfachen und den der zweideutigen Reihe zu einer Doppeltangente besitzt.“

Auf die ausführliche Theorie dieser Curven werde ich, auf die jetzt zu entwickelnden Prinzipien gestützt, im zweiten Theile zurückkommen.

13. Zwei projectivische Gebilde erzeugen bekanntlich in allgemeiner Lage einen Kegelschnitt, während sie in spezieller Lage einen Gränzfall der Kegelschnitte, also entweder zwei Geraden oder zwei Punkte erzeugen. Zwei projectivische Büschel z. B. sind dann perspectivisch, wenn sich der gemeinschaftliche Strahl beider Büschel selbst entspricht. Die Schnittpunkte entsprechender Strahlen liegen auf einer Geraden — dem perspectivischen Durchschnitte — welcher als das Erzeugniss beider Büschel anzusehen ist. Zu diesem Erzeugnisse ist überdiess der gemeinschaftliche Strahl beider Büschel zu nehmen, weil jeder seiner Punkte als Schnittpunkt der beiden, in ihm zusammenfallenden sich entsprechenden Strahlen angesehen werden kann. Es entstehen auf diese Weise zwei Gerade oder ein Kegelschnitt mit einem Doppelpunkte.

Ebenso ist das Erzeugniss zweier perspectivischen Punktreihen ein Punktepaar oder ein Kegelschnitt mit einer Doppeltangente.

Es entsteht nun naturgemäss die Frage, ob nicht eine der perspectivischen Lage der projectivischen Gebilde ähnliche Lage der einzweideutigen Gebilde existire. Dem ist in der That so.

Hat man zwei einzweideutige Gebilde G' und G'', welche unter Beibehaltung der gegenseitigen Lage ihrer Elemente eine Ortstransformation erleiden können, so kann man sie in doppelte Lage zu einander in der Ebene bringen.

1) Die allgemeine Lage, welche wir bisher vorausgesetzt haben und welche analog ist der allgemeinen Lage der projectivischen Gebilde.

2) Die der perspectivischen Lage der projectivischen Gebilde analoge Lage, d. i. also jene, in welcher zwei sich entsprechende Elemente beider Gebilde aufeinander fallen. Wir wollen diese Lage der einzweideutigen Gebilde die „reducirte Lage" derselben nennen.

„Zwei einzweideutige Gebilde sind also in reducirter Lage, wenn sich ihr gemeinschaftliches Element selbst entspricht."

14. Nachdem wir in Art. 12 die Erzeugnisse einzweideutiger Gebilde in allgemeiner Lage kennen gelernt haben, übergehen wir jetzt zu den Erzeugnissen solcher Gebilde in reducirter Lage.

Es ist im vornhinein zu erwarten, dass dieselben einfacher, als jene in Art. 12 aufgetretenen sein werden.

Betrachten wir zwei einzweideutige Büschel $G' G''$ in reducirter Lage, also in einer solchen Lage, dass dem gemeinschaftlichen Strahle g beider Gebilde, wenn man ihn zum eindeutigen Büschel rechnet und dann mit g' bezeichnet, er selbst, also wieder g im zweideutigen Büschel entspricht. Er möge dann mit g_1'' bezeichnet werden. Selbstverständlich wird dem g' ausser g_1'' noch ein zweiter Strahl g_2'' entsprechen.

Die beiden Büschel in solcher Lage, welche wir als die reducirte bezeichnet hatten, ergeben eine Curve, zu welcher der gemeinschaftliche Strahl als Bestandtheil gehört, da man jeden seiner Punkte als den Schnitt des Strahles g' mit seinem entsprechenden g_1'' betrachten kann. In der That, schneidet man die beiden Büschel durch irgend eine Transversale T, so wird der Schnittpunkt der Transversale mit dem gemeinschaftlichen Strahl g einer der drei Doppelpunkte der auf T entstehenden einzweideutigen Reihen sein und folglich der Curve angehören. Da diess für alle Punkte des gemeinschaftlichen Strahles gilt, so ist der ganze Strahl g, als Linie aufgefasst, ein Bestandtheil der erzeugten Curve. Die Gerade g ist eine Curve erster Ordnung, und da das Erzeugniss der beiden einzweideutigen Büchel eine Curve dritter Ordnung sein muss, so müssen sich die übrigen Strahlen der beiden Büschel auf einem Kegelschnitte schneiden. Diesen Kegelschnitt wollen wir den „Reductionskegelschnitt" der beiden Büschel nennen. Was seine Lage betrifft, so ist leicht einzusehen, dass der Scheitel des eindeutigen Büschels G', weil er schon einmal auf dem zum Erzeugniss gehörigen Strahle g liegt und nach Art. 12 ein einfacher Punkt des Erzeugnisses sein muss, ausserhalb der Peripherie des Reductionskegelschnittes liegen müsse, wogegen der Scheitel des zweideutigen Büschels G'', weil er ein Doppelpunkt der erzeugten Curve sein soll, auf dem Reductionskegelschnitt sich befinden muss.

Die reciproken Betrachtungen geben auch die reciproken Resultate. Beide Arten der Ergebnisse kann man in folgendem Dualsatze ausdrücken:

„Entsprechende Strahlen zweier in reducirter Lage befindlichen Büschel G' und G'', welche in ein-zwei-deutiger Beziehung zu einander stehen, durchschneiden sich in Punkten eines Kegelschnittes — des Reductionskegelschnittes R —. Der Scheitel des zweideutigen Büschels G'' ist ein Punkt von R, während jener des eindeutigen Büschels G' ausserhalb der Curve R liegt."

„Die Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier in reducirter Lage befindlichen Reihen G' und G'', welche in ein-zweideutiger Beziehung zu einander stehen, umhüllen einen Kegelschnitt — den Reductionskegelschnitt R —. Der Träger der zweideutigen Reihe G'' ist eine Tangente von R, während jener der eindeutigen Reihe G' die Curve R schneidet."

Die beiden einzweideutigen Gebilde G' und G'' werden also sofort bestimmt sein und vervollständigt werden können, wenn man den Reductionskegelschnitt R und die Träger der beiden Gebilde kennt.

15. Sei Fig. 1 (Taf. I) R der Reductionskegelschnitt zweier einzweideutigen Punktreihen G' und G''. Der Träger T'' der zweideutigen Reihe ist dann nach Art. 14 eine Tangente von R, während es der Träger T' der eindeutigen Reihe G' nicht ist.

Einem Punkte x_1 [1]) der zweideutigen Reihe ist jener einzige Punkt x der eindeutigen zugeordnet, in welchem der Träger T' von der durch x_1 an R gehenden Tangente ξ_1 getroffen wird.

Dagegen entsprechen jedem Punkte x der eindeutigen Reihe jene zwei Punkte $x_1\,x_2$, in welchen ihr Träger T'' von den durch x an R gehenden Tangenten $\xi_1\,\xi_2$ getroffen wird.

Die Punkte $x_1\,x_2$ bilden Paare einer Punktinvolution; denn nach der Theorie der Kegelschnitte bilden die von den einzelnen Punkten einer Geraden (T') an einen Kegelschnitt (R) gezogenen Tangentenpaare ($\xi_1\,\xi_2$) eine Tangenteninvolution, welche von jeder Tangente (T'') in einer projectivischen Punktinvolution getroffen wird. In der That ist auch der Charakter der Involution dadurch ausgedrückt, dass das Punktepaar $x_1\,x_2$ vollkommen bestimmt ist, sobald man einen seiner Punkte kennt. Wäre z. B. x_1 bekannt, so findet man x_2, indem man von x_1 an R die Tangente ξ_1 zieht und durch ihren Schnittpunkt x mit T' an R die zweite Tangente ξ_2 zieht, welche T'' in dem gesuchten Punkte x_2 schneidet. Aus der angegebenen Construction entsprechender Punkte folgt dann, dass dem gemeinschaftlichen Punkte g

[1]) Da wir es von nun an nicht mehr mit der Verwandtschaftsgleichung zu thun haben werden, so wollen wir die den Elementen oben angehängten Striche weglassen und statt $x_1''\;x_2''\;x'$ kurz $x_1\,x_2\,x$ schreiben.

beider Reihen, wenn man ihn zur eindeutigen Reihe T rechnet, in der zweideutigen Reihe erstens er selbst entspricht, wesshalb er in der Figur auch den Buchstaben g_1 trägt; zweitens entspricht ihm der Berührungspunkt g_2 von T' mit der Reductionscurve R. Von der Wahrheit des eben Gesagten kann man sich leicht dadurch überzeugen, dass man den Punkt x gegen g rücken lässt; es rückt dann x_1 gegen g_1 und x_2 gegen g_2.

„Der gemeinsame Punkt zweier in reducirter Lage befindlichen einzweideutigen Reihen entspricht sich einmal selbst, während ihm in der zweideutigen Reihe überdiess der Berührungspunkt ihres Trägers mit dem Reductionskegelschnitte entspricht.

Ebenso leicht würde man die dem unendlich weiten Punkte von T entsprechenden Punkte auf T', und den dem unendlich weiten Punkte auf T' entsprechenden Punkt auf T bestimmen können.

Von besonderer Wichtigkeit sind zwei Punkte der eindeutigen Reihe auf T. Es sind dies nämlich die beiden Schnittpunkte v und w von T mit dem Reductionskegelschnitt R. Diese zwei Punkte sind, wie man gleich einsehen wird, die beiden „Verzweigungspunkte" der eindeutigen Reihe. Die von v an R gehenden zwei Tangenten fallen, weil v ein Punkt von R ist, in die Tangente dieses Punktes zusammen und desshalb fallen auch die, dem Punkte v in der zweideutigen Reihe entsprechenden Punkte v_1 und v_2 in dem einen Schnittpunkt dieser Tangente mit T' zusammen, welcher sonach ein Doppelpunkt der zweideutigen Reihe ist und mit v_{12} bezeichnet wurde. Ebenso ist w der zweite Verzweigungspunkt, welchem der Doppelpunkt w_{12} der zweideutigen Reihe entspricht.

Die beiden Doppelpunkte w_{12} v_{12} sind gleichzeitig die beiden Doppelpunkte der auf T' bestehenden Punktinvolution.

„Die Verzweigungspunkte der eindeutigen Reihe sind für die reducirte Lage die Schnittpunkte ihres Trägers mit der Reductionscurve; die Tangenten der Reductionscurve in den Verzweigungspunkten treffen den Träger der zweideutigen Reihe in den beiden Doppelpunkten derselben."

„Jedes Punktepaar x_1 x_2 der zweideutigen Reihe theilt die Strecke w_{12} v_{12} des Doppelpunktepaares harmonisch.

Diess ist ja die Grundeigenschaft der Doppelpunkte einer quadratischen Involution. — Beide Verzweigungspunkte v und w sind als Schnittpunkte einer Geraden mit einem Kegelschnitt gleichzeitig reell oder imaginär oder aber sie können zusammenfallen. Dem entsprechend können die beiden Doppelpunkte v_{12} w_{12} der zweideutigen Reihe

ebenso, aber wieder gleichzeitig mit den Verzweigungspunkten, reell oder imaginär sein oder aber zusammenfallen.

Reell sind diese vier besonderen Punkte v, w, v_{12}, w_{12} dann, wenn der Träger T', also der Träger der eindeutigen Reihe die Reductionscurve in reellen Punkten schneidet. In diesem Falle gibt es nun zwischen den beiden reellen Verzweigungspunkten v und w unendlich viele Punkte, deren entsprechende Punktepaare auf T'' imaginär sind; und zwar desshalb, weil die von solchen Punkten an R gehenden Tangenten imaginär werden. Wenn dagegen die Gerade T' den Kegelschnitt R nicht in reellen Punkten trifft, so sind Verzweigungs- und Doppelpunkte imaginär, und es gibt dann auf T' keinen Punkt, dessen entsprechendes Punktepaar auf T'' imaginär wäre.

Im ersten der beiden Fälle ist also die zweideutige Reihe „complex", während sie im zweiten Falle „reell" ist. Wenn schliesslich die Gerade T' den Reductionskegelschnitt ebenfalls berührt, so fallen sowohl die Verzweigungspunkte, als auch die Doppelpunkte zusammen. Dann sind aber die beiden Punktreihen nicht mehr einzweideutig, sondern eindeutig, d. h. projectivisch.

„Schneidet der Träger der eindeutigen Reihe in reducirter Lage den Reductionskegelschnitt in reellen Punkten, so ist die zweideutige Reihe complex; schneidet er aber den Reductionskegelschnitt in imaginären Punkten, so ist die zweideutige Reihe reell. Berührt der Träger der eindeutigen Reihe den Reductionskegelschnitt, so sind die Reihen projectivisch."

16. Der Wichtigkeit des Gegenstandes halber wollen wir in diesem Artikel in aller Kürze die einzweideutigen Büschel in reducirter Lage ebenfalls der Betrachtung unterwerfen, ob zwar sie auf Grund des Dualitätsprincips in dem Vorhergehenden vollständig abgethan wurden.

Wenn Fig. 2 (Taf. I) R der Reductionskegelschnitt zweier einzweideutigen Büschel ist, so muss der Scheitel des zweideutigen Büschels, da die Büschel in reducirter Lage sein sollen, auf R liegen; es sei der Punkt t'' von R. Der Scheitel t' des eindeutigen Büschels ist dann ein willkührlicher Punkt der Ebene.

Nun sind die beiden Büschel in ihrer geometrischen Beziehung vollständig bestimmt. Jedem Strahle X des eindeutigen Büschels entsprechen jene zwei Strahlen X_1 X_2 des zweideutigen Büschels, welche nach den Schnittpunkten ξ_1 ξ_2 von X mit R gehen. Die Strahlenpaare X_1 X_2 bilden, so wie sie den einzelnen Strahlen aus t' entsprechen, eine Strahleninvolution zweiten Grades; denn in der That bilden die Punktepaare ξ_1 ξ_2 auf dem Reductionskegelschnitte R, weil durch Strahlen aus einem Punkte bestimmt, eine Punktinvolution, mit welcher die

Strahleninvolution des zweideutigen Büschels perspectivisch liegt. Die Vertauschungsfähigkeit der Strahlen eines Paares wird ebenso einleuchtend gemacht, wie diess bei der zweideutigen Punktreihe in Art. 15 geschehen ist.

Dem gemeinschaftlichen Strahle G der beiden Büschel, welchen man ebensowohl zu dem einen, als auch zu dem anderen rechnen muss, entspricht, wenn man ihn zum eindeutigen Büschel rechnet, im zweideutigen erstens der Strahl G selbst, wesshalb er auch den Buchstaben G_1 trägt, und zweitens entspricht ihm die Tangente G_2 des Reductionskegelschnittes R im Scheitel des zweideutigen Büschels. Denn dreht man X nach G, so kommt, wie aus der Figur sofort zu entnehmen ist, X_1 nach G_1 (d. i. nach G) und X_2 nach G_2.

„Der gemeinsame Strahl zweier in reducirter Lage befindlichen einzweideutigen Büschel entspricht sich einmal selbst, während ihm im zweideutigen Büschel überdiess die Tangente des Reductionskegelschnitts im Scheitel entspricht.“

Sowie bei der eindeutigen Reihe [Art. 15; Fig. 1 (Taf. I)] die Schnittpunkte derselben mit dem Reductionskegelschnitt die beiden Verzweigungspunkte vorstellten, so sind hier die beiden von t' an R gehenden Tangenten V und W die beiden „Verzweigungsstrahlen“ des eindeutigen Büschels. Die Schnittpunkte von V mit R fallen, weil V eine Tangente von R ist, in deren Berührungspunkte zusammen, und demgemäss werden auch die beiden, dem Strahle V entsprechenden Strahlen V_1 und V_2 in dem durch diesen Berührungspunkt gehendem Strahle zusammenfallen, welcher doppelte Strahl dann mit V_{12} bezeichnet werden muss. Es ist ein Doppelstrahl des zweideutigen Büschels. Ebenso ist der nach dem Berührungspunkte von W mit R gehende Strahl W_{12} ein Doppelstrahl des zweideutigen Büschels; in ihm sind die beiden dem W entsprechenden Strahlen W_1 und W_2 vereinigt.

Die beiden Doppelstrahlen V_{12} W_{12} sind gleichzeitig die beiden Doppelstrahlen der auf t'' bestimmten Strahleninvolution.

„Die Verzweigungsstrahlen des eindeutigen Büschels sind für die reducirte Lage die Tangenten von seinem Scheitel an die Reductionscurve; die Verbindungslinien der Berührungspunkte der Verzweigungsstrahlen und der Reductionscurve mit dem Scheitel des zweideutigen Büschels sind die Doppelstrahlen dieses Büschels.“

„Jedes Strahlenpaar X_1 X_2 des zweideutigen Büschels theilt den Winkel V_{12} W_{12} des Doppelstrahlenpaares harmonisch.“

Die beiden Verzweigungsstrahlen V und W sind als Tangenten

des Kegelschnitts R aus einem Punkte gleichzeitig reell oder imaginär oder aber sie fallen zusammen. Demgemäss können die beiden Doppelstrahlen V_{12} W_{12} des zweideutigen Büschels (wieder jedoch gleichzeitig und zwar gleichzeitig mit den Verzweigungsstrahlen) reell oder imaginär sein oder aber zusammenfallen.

Reell sind die vier Strahlen V, W, W_{12}, V_{12} dann, wenn der Punkt t', d. h. der Scheitel des eindeutigen Büschels ausserhalb[1]) des Kegelschnittes R liegt, weil dann von ihm an R zwei reelle Tangenten gehen. In diesem Falle theilen die beiden Verzweigungsstrahlen V und W die ganze Ebene in zwei Winkelflächen, derart, dass den Strahlen der einen reelle Strahlenpaare, und den Strahlen der anderen imaginäre Strahlenpaare im zweideutigen Büschel entsprechen. Liegt dagegen der Scheitel t' innerhalb R, d. h. gehen von ihm an R keine reellen Tangenten, so sind Verzweigungs- und Doppelstrahlen imaginär; dann entsprechen aber jedem Strahle des eindeutigen Büschels zwei reelle Strahlen des zweideutigen Büschels.

Im ersten Falle sagen wir, dass das zweideutige Büschel „complex" sei, während es im zweiten Falle „reell" ist. Liegt endlich der Scheitel t' auf R, so fallen die beiden Verzweigungsstrahlen und die beiden Doppelstrahlen zusammen. Dann sind aber die beiden Büschel nicht mehr einzweideutig, sondern eindeutig, d. h. projectivisch.

„Liegt der Scheitel des eindeutigen Büschels in reducirter Lage ausserhalb des Reductionskegelschnitts, so ist das zweideutige Büschel complex; liegt er innerhalb des Reductionskegelschnitts, so ist das zweideutige Büschel reell. Liegt der Scheitel des eindeutigen Büschels auf der Reductionscurve, so sind beide Büschel projectivisch."

17. Bei der Vervollständigung zweier in reducirter Lage befindlichen einzweideutigen Gebilde kann man, wie wohl aus den zwei letzten Artikeln einleuchtend sein dürfte, auf zweierlei Art vorgehen. Entweder man nimmt einzelne Elemente des eindeutigen Gebildes und bestimmt zu ihnen die entsprechenden Elementenpaare des zweideutigen Gebildes, oder man geht vom zweideutigen Gebilde aus, indem man zu den Elementen desselben die entsprechenden im eindeutigen Gebilde bestimmt. Der erste Weg führt auf eine Aufgabe zweiten Grades, während der zweite eine Aufgabe des ersten Grades zur Lösung verlangt. In der That, nehmen wir Beispiels halber die einzweideutigen Punktreihen in Art. 15 und verlangen zu dem Punkte x der eindeutigen Reihe die entsprechenden x_1 x_2 der zweideutigen Reihe zu

---

[1]) Von einem Punkte t' sagen wir, er liege ausserhalb oder innerhalb eines Kegelschnitts R, wenn von ihm an R zwei reelle oder zwei imaginäre Tangenten gehen; liegt t' auf R, so fallen die beiden Tangenten zusammen.

finden, so ist diess mit der Aufgabe verbunden, vom Punkte x an den Directionskegelschnitt R die beiden Tangenten ξ_1 und ξ_2 zu ziehen, welche Aufgabe aber vom zweiten Grade ist und im Allgemeinen die Hülfe des Cirkels beansprucht. Soll dagegen zum Punkte x_1 der zweideutigen Reihe der einzig entsprechende Punkt der eindeutigen Reihe construirt werden, so hat man von x_1 an R die Tangente ξ_1 zu construiren, während man die andere durch x_1 an R gehende Tangente T' bereits kennt. Diess ist dann eine Aufgabe ersten Grades und kann mit dem Lineal allein gelöst werden. Da es nun für die Vervollständigung der beiden einzweideutigen Gebilde G' und G'' einerlei ist, ob man vom eindeutigen G' oder vom zweideutigen G'' ausgeht, und man also immer den ersten Weg wählen kann, so kann man behaupten:

„Die Vervollständigung zweier einzweideutigen Grundgebilde in reducirter Lage kann immer auf lineale Weise bewerkstelligt werden.“

18. Von zwei einzweideutigen, in reducirter Lage befindlichen Grundgebilden können nicht, wie im Falle der allgemeinen Lage, fünf Elementenpaare willkührlich angenommen werden. Es sind hierzu vier Elemente erforderlich und hinreichend, weil das gemeinschaftliche Element beider Gebilde das fünfte Paar von entsprechenden Elementen vorstellt. Seien nun in Fig. 3 (Taf. I) A, B, C, D vier Strahlen des eindeutigen Büschels t', denen im zweideutigen, mit ihm in reducirter Lage befindlichen Büschel t'' die vier Strahlen A_1, B_1, C_1, D_1 entsprechen. Es werden den vier Strahlen A, B, C, D noch weitere vier im zweideutigen Büschel entsprechen, welche nach der schon eingeführten Bezeichnung mit A_2, B_2, C_2, D_2 zu bezeichnen wären. Wenn man von den zwei Büscheln nun weiss, dass sie in reducirter Lage sich befinden, so sind beide Büschel vollkommen bestimmt. Man hat jetzt von dem Reductionskegelschnitte R fünf Punkte gegeben, wodurch derselbe bestimmt ist. Die vier Strahlenpaare AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 bestimmen in ihren vier Schnittpunkten a_1, b_1, c_1, d_1 vier Punkte des Reductionskegelschnittes R, für welchen der Scheitel t'' der fünfte Punkt ist. Sollen nun die beiden Büschel vervollständigt werden, so wird man, um nur des Lineals bedürftig zu sein, von dem zweideutigen Büschel ausgehen. Soll zu einem Strahle X_1 des zweideutigen Büschels t'' der entsprechende X im eindeutigen construirt werden, so kommt es darauf an, den Schnittpunkt x_1 von X_1 mit dem Reductionskegelschnitte R zu finden und ihn dann mit t' zu verbinden; die Verbindungslinie $x_1 t'$ ist dann der gesuchte Strahl X. Die Construction kann natürlicher Weise mit Umgehung des vollständigen Contours des Reductionskegelschnittes auf Grund des Satzes von Pascal durchgeführt werden. Bezeichnet man nämlich die fünf bekannten Punkte

a_1, b_1, c_1, d_1 und t'' des Reductionskegelschnittes der Reihe nach mit den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 und den auf X_1 liegenden Punkt x_1 (welcher zu construiren ist) mit 6, so bilden die sechs Punkte 1 2 3 4 5 6 ein dem Reductionskegelschnitt eingeschriebenes Sechseck, worauf der Satz von Pascal angewendet werden kann. Dieser Satz sagt aus, dass die Gegenseitenpaare des Sechseckes sich in Punkten einer Geraden treffen. Diese Gerade ist die Pascallinie P des Sechseckes. Zieht man also die Linien 12 ($= a_1\, b_1$) und 45 ($= d_1\, t''$), so treffen sich diese in einem Punkte III der Pascallinie P. Ebenso ist der Schnitt IV von 23 ($= b_1\, c_1$) mit 56 ($= t''\, x_1 = X_1$) ein Punkt von P und man erhält somit P durch Verbindung von III mit IV. Schneidet man nun P mit 34 ($= c_1\, d_1$) in V, so muss 61 ($= x_1\, a_1$) durch V hindurchgehen. Man hat also nur V mit a_1 durch eine Gerade zu verbinden, welche Linie X_1 im Punkte x_1 trifft. Wenn man schliesslich x_1 mit t' verbindet, so erhält man den gesuchten Strahl X.

Nimmt man nach und nach andere Lagen des Strahles X_1 an, so bleibt für die gewählte Anordnung der Punkt III der Pascallinie fest, um den sich dieselbe bei der Construction dreht. Man kann auch vortheilhaft von der Pascallinie ausgehen und dieselbe um den Punkt III rotiren lassen. Dann rückt der Punkt IV auf der festen Geraden $b_1\, c_1$ und V auf $c_1\, d_1$ fort. Es könnte oft von Interesse sein, die den einzelnen Strahlen des eindeutigen Büschels entsprechenden Strahlenpaare des zweideutigen zu finden. Geht man da vom eindeutigen Büschel t' aus, so hat man immer eine Aufgabe des zweiten Grades bezüglich des Reductionskegelschnittes zu lösen. Um z. B. zu einem Strahle X des eindeutigen Büschels die entsprechenden zwei Strahlen $X_1\, X_2$ des zweideutigen zu finden, muss man die beiden Schnittpunkte $x_1\, x_2$ des Strahles X mit dem Reductionskegelschnitt R bestimmen, und diese mit t'' verbinden, was die beiden Strahlen $X_1\, X_2$ liefert. Man kann jedoch auch lineal solche Strahlenpaare construiren, nur muss man vom zweideutigen Büschel ausgehen. Wenn z. B. der Strahl X_1 im zweideutigen Büschel angenommen wird, so kann man nach Früherem lineal den Strahl X des eindeutigen Büschels, welcher dem X_1 entspricht, bestimmen. Wenn nun einmal diese zwei Strahlen, — also auch der Punkt x_1 des Reductionskegelschnittes bekannt ist, so kann man wieder lineal den zweiten Schnittpunkt x_2 von X mit R finden und mit t'' verbinden, was den dem X überdiess entsprechenden Strahl X_2 liefern wird. Dann hat man also das dem X entsprechende Strahlenpaar $X_1\, X_2$ gefunden. Da wir in späteren Untersuchungen von einzweideutigen Punktreihen ebenso oft Anwendung machen müssen, wie von solchen Strahlenbüscheln, so mag auch noch die Vervollständigungsart der einzweideutigen Punktreihen in reducirter Lage in diesem Artikel gehandelt werden. Sind Fig. 4 (Taf. I) T und T' die

Träger zweier resp. einzweideutigen Punktreihen in reducirter Lage, so weiss man, dass im Schnittpunkte von T' und T'' ein Elementen-(Punkte)paar vereinigt ist. Man darf somit nur 4 weitere Punktepaare willkührlich annehmen. In der Figur wurden auf der eindeutigen Reihe die 4 Punkte a, b, c, d und ihnen entsprechend auf der zweideutigen a_1, b_1, c_1, d_1 angenommen. Abermals ist zu bemerken, dass dem a z. B. ausser a_1 noch ein zweiter Punkt entspricht, welcher mit a_2 zu bezeichnen wäre. Von dem Reductionskegelschnitt R hat man nun fünf Tangenten, nämlich: den Träger T'' der zweideutigen Reihe, und die vier Verbindungslinien A_1, B_1, C_1, D_1 der vier Punktpaare aa_1, bb_1, cc_1, dd_1 gegeben. Soll nun zu einem Punkte x_1 der zweideutigen Reihe der entsprechende Punkt x der eindeutigen Reihe construirt werden, so hat man nur von x_1 an R die Tangente X_1 zu ziehen, welche T' in dem gesuchsen Punkte x schneidet. Zur Construction von X_1, welche lineal durchführbar ist und mit Umgehung des Reductionskegelschnittes geführt werden kann, wird man den Satz von Brianchon verwenden. Bezeichnet man die Linien A_1, B_1, C_1, D_1, T'' der Reihe nach mit den Ziffern 2, 1, 4, 3, 5 und die gesuchte Tangente X_1 mit 6, so bilden diese sechs Tangenten ein dem Kegelschnitte R umschriebenes Sechsseit, auf welches der Satz von Brianchon angewendet werden kann. Nach demselben gehen die drei Verbindungslinien der drei Gegeneckenpaare des Sechsseites: 1 2 3 4 5 6 durch einen Punkt, den Brianchonpunkt β. Construirt man also die Punkte:

(12)[1] $= (B_1 A_1)$ und (45) $= (C_1 T'')$ so ist ihre Verbindungslinie III eine von den drei Geraden, welche durch den Brianchonpunkt gehen müssen. Ebenso liegt der Brianchonpunkt auf der Verbindungslinie IV der Punkte (23) $= (B_1 D_1)$ und (56) $= x_1$ und folglich ist der Brianchonpunkt der Schnitt β von III mit IV. Verbindet man nun β mit dem Punkte (34) $= (D_1 C_1)$, so erhält man die Gerade V, welche 1 in demselben Punkte treffen muss wie X_1. Man hat also nur schliesslich den Punkt (V B_1) mit x_1 zu verbinden, um die gesuchte Tangente X_1 construirt zu haben. Welche Punkte und Linien bei der Vervollständigung fest bleiben und wie sich die übrigen der Lage nach ändern, wollen die Leser aus dem in diesem Artikel über Büschel Gesagten selbst entnehmen. Ebenso, dass man von dem Brianchonpunkt β ausgehen könne, indem man das Sechsseit für verschiedene Lagen desselben auf der festen Linie construirt.

19. Wir haben im vorigen Artikel die einzweideutigen Punktreihen und Strahlenbüschel in reducirter Lage dadurch zu vervollständigen gelernt, dass wir vom zweideutigen Gebilde ausgehend zu

---

[1]) Der Punkt (12) ist der Schnittpunkt des Strahles 1 mit dem Strahle 2.

beliebig angenommenen Elementen desselben die entsprechenden in dem eindeutigen Gebilde nach den Sätzen von Pascal und Brianchon bestimmten.

Wir haben auch schon betreffenden Ortes bemerkt, dass man beim Ausgange vom eindeutigen Gebilde immer eine Aufgabe des zweiten Grades zu lösen hätte.

Soll z. B. in Fig. 3 (Taf. I) zu dem Strahle X des eindeutigen Büschels das entsprechende Strahlenpaar X_1 X_2 des zweideutigen construirt werden, so müsste man die Schnittpunkte x_1 und x_2 des Kegelschnittes R mit dem Strahle X finden und diese mit t'' verbinden. Die beiden Punkte x_1 und x_2 würden sich als die Doppelpunkte zweier auf X liegenden projectivischen Reihen darstellen lassen.[1]) Die Construction derselben wird mittelst eines Kreises bewerkstelligt werden können. Nun ist es wichtig, eine Methode kennen zu lernen, bei deren Verwendung man mit einem einzigen festen Kreise für alle Lagen des Strahles X auskommt. Eine solche Methode, welche auch für einzweideutige Punktreihen verwendbar ist, soll in diesem Artikel entwickelt werden. Betrachten wir zuerst die Strahlenbüschel. — In Art. 11 wurde schon gezeigt, dass das zweideutige Gebilde eigentlich eine quadratische Involution ist. Eine solche ist aber bekanntlich unmittelbar bestimmt, sobald man zwei Paare ihrer Elemente kennt, und wir wollen auch die Methoden, nach welchen so gegebene Involutionen vervollständigt werden, als bekannt voraussetzen. Man denke sich nun zwei einzweideutige Büschel t' und t'' und seien A_1 A_2, B_1 B_2 Fig. 5 (Taf. I) die zwei Strahlenpaare des zweideutigen Büschels, welche den Strahlen A und B des eindeutigen Büschels, die wir jedoch nicht weiter zeichnen wollen, entsprechen. Durch die beiden Strahlenpaare ist das zweideutige Büschel insoweit gegeben, als man zu jedem Strahle C_1 den Strahl C_2 lineal construiren kann, welcher mit ihm unter allen Umständen ein Strahlen p a a r bildet. Durch die zwei Strahlen A, B und die ihnen entsprechenden Strahlenpaare A_1 A_2, B_1 B_2 sind nämlich die beiden einzweideutigen Büschel nicht bestimmt; man muss noch dem Strahle C_1 den Strahl C zuordnen; mag man aber den Strahl C ganz willkührlich nehmen, so wird ihm ausser C_1 der dem C_1 involutorisch verwandte Strahl C_2 entsprechen. Solche Strahlenpaare C_1 C_2 zu construiren heisst nun nichts anderes, als die Involution, welche da auftritt, vervollständigen.

Diess geschieht nun bekanntlich am einfachsten mittslst eines beliebigen durch den Scheitel t' des zweideutigen Büschels gelegten Kreises K (statt K könnte man einen willkührlichen durch t'' gehenden Kegelschnitt nehmen).

[1]) Vergleiche Chasles Traité des sections coniques. Art. 12.

Der Kreis K trifft die zwei Strahlenpaare $A_1\,A_2$, $B_1\,B_2$ resp. in den beiden Punktepaaren $a_1\,a_2$, $b_1\,b_2$ einer Punktinvolution auf seiner Peripherie. Entsprechende Punktepaare einer Involution auf einem Kegelschnitte liegen nun bekanntlich auf Strahlen eines Büschels, dessen Scheitel p man im vorliegenden Falle als Schnittpunkt der Linien $\overline{a_1\,a_2}$, $\overline{b_1\,b_2}$ findet. Diese zwei Linien wurden in der Figur mit α und β bezeichnet.

Soll nun zu dem Strahle C_1 der zugehörige Strahl C_2 gefunden werden, so verbinde man den Schnitt c_1 von C_1 und K mit p durch den Strahl γ, welcher K weiter in c_2 schneidet. Der von t'' nach c_2 gehende Strahl ist der gesuchte Strahl C_2. Auf diese Weise kann man die quadratische Strahleninvolution vervollständigen.

Von besonderem Interesse sind die Doppelstrahlen, welche man erhält, wenn man von p an K die Tangenten v und ω zieht und die Berührungspunkte v_{12}, w_{12} derselben mit t'' durch die Strahlen V_{12}, W_{12} verbindet. Diese Strahlen V_{12}, W_{12} sind die beiden Doppelstrahlen der Involution und des zweideutigen Büschels. Das Tangentenziehen kann man sich ersparen, indem man in dem Vierecke $a_1\,b_1\,b_2\,a_2$ die dem Punkte p gegenüberliegende Diagonalseite P zieht, welche — weil die Polare von p bezüglich K — den Kreis in den Punkten v_{12} und w_{12} schneidet.

Es kann noch bemerkt werden, dass wenn man durch p jenen Strahl legt, welcher durch den Mittelpunkt des Constructionskreises K geht, man das Strahlenpaar des doppeldeutigen Büschels erhält, welches einen rechten Winkel bildet. Wir nennen es das rechtwinklige Strahlenpaar.

Den Punkt p, welcher so vortheilhaft bei der Construction verwendet werden kann, nennen wir das perspectivische Centrum der auf K entstehenden Punktinvolution. Die beiden Doppelstrahlen V_{12}, W_{12} sind dann reell, wenn P den Kreis schneidet, und im entgegengesetzten Falle imaginär.

Wenn man jetzt die Figur 5 (Taf. I) etwas näher betrachtet, so wird man leicht finden, dass man es in ihr mit zwei einzweideutigen Büscheln in reducirter Lage zu thun hat, deren Reductionskegelschnitt der Kreis K ist. Das zweideutige Büschel ist die Involution von Strahlen, deren Scheitel t'' ist, und das eindeutige Büschel ist das Strahlenbüschel α, β, γ . . . dessen Scheitel das perspectivische Centrum p der Involution auf K ist. Es entspricht dem Strahle α das Paar $A_1\,A_2$, dem β entspricht $B_1\,B_2$ u. s. w. Das Paar der Verzweigungsstrahlen im eindeutigen Büschel ist v und ω.

Nun möge aber nicht vergessen werden, dass wir das zweideutige Büschel mit einem eindeutigen (in der Figur jedoch nicht vorhandenen) Büschel A, B . . . in Verbindung gesetzt haben. Dem Strahle A

entspricht das Paar $A_1 A_2$ u. s. w. Daraus folgt jedoch unmittelbar, dass die beiden Büschel A, B u. s. w. und α, β ... eindeutig, d. h. projectivisch unter einander sind. Entsprechende Strahlen dieser zwei Büschel sind solche, denen im zweideutigen Büschel t'' dasselbe Strahlenpaar entpricht.

Soll also zu einem Strahle des Büschels $(A, B, C \dots)$ das entsprechende Strahlenpaar im Büschel t'' construirt werden, so bestimme man zunächst den, diesem Strahle im Büschel $(\alpha, \beta, \gamma \dots)$ entsprechenden Strahl, welcher den Kreis K in zwei Punkten treffen wird, die mit t'' verbunden das verlangte Strahlenpaar geben. Wollte man so z. B. zum Strahle C das entsprechende Paar C_1, C_2 finden, so würde man vor Allem den Strahl γ bestimmen, welcher den Constructionskreis K in dem Punktepaare $c_1 c_2$ schneidet, und dann diese Punkte mit t'' durch die beiden verlangten Strahlen $C_1 C_2$ verbinden. Wir wollen nun diese Methode auf einzweideutige Büschel in reducirter Lage anwenden. —

Seien Fig. 6 (Taf. I) A, B, C, D vier Strahlen des eindeutigen Büschels t', denen im zweideutigen Büschel t'' die vier Strahlen A_1, B_1, C_1, D_1 entsprechen mögen. Da die beiden Büschel in reducirter Lage vorausgesetzt werden, so entspricht dem gemeinschaftlichen Strahle G, wenn man ihn zum eindeutigen Büschel rechnet, er selbst im zweideutigen Büschel einmal, wesshalb er auch den Buchstaben G_1 trägt. Durch diese fünf Strahlenpaare sind diese beiden Büschel bestimmt.

Um nun die vorhin entwickelte Methode auf diesen Fall anwenden zu können, müssen wir zwei Strahlenpaare des zweideutigen Büschels kennen.

Solche können wir uns leicht lineal verschaffen. Wir wissen, dass die beiden Büschel, weil in reducirter Lage, einen Kegelschnitt R — den Reductionskegelschnitt — zum Schnitte geben. Von diesem Kegelschnitt R kennen wir nun fünf Punkte, nämlich die vier Schnittpunkte (AA_1), (BB_1), (CC_1), (DD_1) und den Scheitel t'' des zweideutigen Büschels. Wir wollen sie in dieser Reihenfolge mit den Ziffern 1, 5, 4, 2, 3 bezeichnen.

Der Strahl A schneidet den Reductionskegelschnitt R ausser in dem Punkte 1 noch in einem zweiten Punkte, welchen wir mit 6 bezeichnen wollen. Die sechs Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 bilden ein Pascal'sches Sechseck, von dem wir wissen, dass die Schnittpunkte der drei Gegenseitenpaare auf einer Geraden, der Pascallinie liegen. Wenn man nun bedenkt, dass $\overline{61}$ der Strahl A ist, welchem als Gegenseite $\overline{34}$ $(= C_1)$ zugeordnet ist, so kann man die Pascallinie leicht zeichnen. Sie ist die Verbindungslinie des Schnittes von $\overline{12}$ und $\overline{45}$ mit dem Schnitte von $\overline{34}$ und $\overline{61}$. Auf derselben muss auch der Schnitt von $\overline{23}$ und $\overline{56}$ liegen. Verbindet man daher den Schnittpunkt dieser

Pascallinie und der Linie $\overline{23}$ mit dem Punkte 5, so erhält man eine Gerade, auf welcher 6 liegen muss und somit ist 6 der Schnittpunkt dieser letzten Geraden mit dem Strahle $\overline{61}$ ($= A$). Verbindet man nun diesen mit t'', so erhält man den Strahl A_2, welcher als zweiter dem Strahl A entspricht.

Um den, dem Strahle B ausser B_1 noch weiter entsprechenden Strahl B_2 zu finden, wiederhole man das Verfahren, wobei die Bezeichnung dieselbe bleiben kann und nun der zweite Schnitt von B mit R mit 6 zu bezeichnen ist. Hier ist die Pascallinie die Verbindungslinie von (12) (45)[1]) mit (23) (56); [$56 = B$]. Verbindet man ihren Schnittpunkt auf (34) mit 1, so trifft diese Verbindungslinie den Strahl 56 ($= B$) in dem Punkte 6. Wenn nun dieser mit t'' verbunden wird, so erhält man den Strahl B_2.

In derselben Weise könnte man lineal die Strahlen C_2, D_2 und G_2 construiren (G_2 wäre die Tangente des Reductionskegelschnittes im Punkte t'').

Nachdem man jedoch die beiden Strahlenpaare $A_1\,A_2$, $B_1\,B_2$ schon kennt, ist es ein Leichtes, in anderer Weise die Vervollständigung vorzunehmen.

Legt man durch t'' einen beliebigen Constructionskreis K, so bestimmt das zweideutige Büschel $A_1\,A_2$, $B_1\,B_2 \ldots$ auf diesem Kreise eine Involution von Punkten $a_1\,a_2$, $b_1\,b_2 \ldots$ von der man weiss, dass entsprechende Punktepaare auf Strahlen aus einem Punkte, dem perspectivischen Centrum p der Involution, liegen. Zieht man also die Linien $a_1\,a_2 = \alpha$ und $b_1\,b_2 = \beta$, so schneiden sie sich in diesem perspectivischen Centrum p.

Um den Strahl C_2 zu finden bemerke man, dass er mit C_1 auf dem Kreise ein Punktepaar der erwähnten Involution bestimmt. Nun schneidet C_1 den Kreis in c_1; zieht man also $c_1\,p = \gamma$, welche Linie K in c_2 trifft, so ist $t''\,c_2$ der gesuchte Strahl C_2. Ebenso findet sich der zu dem Strahle D_1 zugehörige, dem D entsprechende Strahl D_2.

Es existiren jetzt in der Figur zwei projectivische Strahlenbüschel, nämlich das Büschel $A, B, C, \ldots$ und das Büschel $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Jedem Strahle des einen Büschels entspricht ein und nur ein Strahl des anderen; zwei in diesen Büscheln entsprechende Strahlen sind solche, welchen im zweideutigen Büschel dasselbe Strahlenpaar entspricht.

Von diesen zwei Büscheln, deren Scheitel t' und p sind, hat man vier Strahlenpaare $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ und $D\delta$. Es genügen jedoch schon dreie, z. B. die drei ersten, um die Büschel vervollständigen zu können. Diese Vervollständigung werden wir mittelst des Directionszentrums $\varDelta$ der beiden Büschel vornehmen. Dieses Directionszentrum ist

[1]) Unter (12) (45) verstehen wir den Schnittpunkt von (12) mit (45).

der Schnitt von $(A\beta)$ $(B\alpha)$[1]) mit $(B\gamma)$ $(C\beta)$ und mit $(C\alpha)$ $(A\gamma)$. Soll zu einem Strahle X von t' der entsprechende ξ in p construirt werden, so verbinde man den Schnitt von X und etwa α mit $\mathfrak{M}$ und den Schnittpunkt dieser Verbindungslinie und A verbinde man mit p, was den Strahl ξ liefert.

Der dem Strahle X entsprechende Strahl ξ schneidet den Constructionskreis in zwei (reellen oder imaginären) Punkten x_1 und x_2, welche mit t'' verbunden, die beiden dem X entsprechenden Strahlen X_1 X_2 liefern. Man hat sonach eine Methode, um zu irgend einem Strahle des eindeutigen Büschels mittelst eines festen Kreises die beiden entsprechenden Strahlen im zweideutigen construiren zu können.

Selbstverständlich wird gleichzeitig die Frage nach den Verzweigungs- und Doppelstrahlen beantwortet.

Von dem Punkte p gehen an den Constructionskreis K zwei reelle oder zwei imaginäre Tangenten v und ω, welche denselben in zwei zusammenfallenden Punkten resp. v_{12} und w_{12} schneiden. Die nach diesen Punkten (den Doppelpunkten der auf K auftretenden Punktinvolution) gehenden Strahlen V_{12} und W_{12} des zweideutigen Büschels sind dessen Doppelstrahlen. In dem Büschel t' entsprechen den beiden Strahlen v und ω die beiden Verzweigungsstrahlen V und W.

20. Dasselbe, was für Strahlenbüschel gesagt wurde, gilt auch für Punktreihen.

Liegen zwei einzweideutige Punktreihen T' und T'' vor, so kann man wieder die, auf der zweideutigen Reihe auftretende Involution ohne Rücksicht auf die eindeutige Reihe vervollständigen. Wären z. B. beide Reihen in reducirter Lage durch die vier Punktepaare aa_1, bb_1, cc_1, dd_1 gegeben, so könnte man mittelst des Satzes von Brianchon leicht auf lineale Weise die den Punkten a, b, c, d noch weiters entsprechenden a_2, b_2, c_2, d_2 construiren. (Der Punkt a_2 z. B. wäre der Schnitt des Trägers der zweideutigen Reihe mit der zweiten von a aus an den Reductionskegelschnitt beider Punktreihen gehenden Tangenten.)

Sei nun Fig. 7 (Taf. I) T'' der Träger der zweideutigen Reihe und a_1 a_2, b_1 b_2 die beiden den Punkten a und b entsprechenden Punktepaare. Dadurch ist die Involution auf T'' bestimmt und wird bekanntlich in folgender Weise vervollständigt. Man zieht einen beliebigen den Träger T'' berührenden Constructionskreis K und von den Punktepaaren a_1 a_2, b_1 b_2 an ihn die Tangentenpaare A_1 A_2, B_1 B_2, welche eine quadratische Tangenteninvolution bilden. Diese zwei Tangentenpaare geben die zwei Schnittpunkte α und β, deren Verbindungslinie P

[1]) Unter $(A\beta)$ $(B\alpha)$ verstehe ich die Verbindungslinie des Schnittes von A und β mit dem Schnitte von B und α.

die Axe der Tangenteninvolution ist. Ist nun c_1 ein weiterer Punkt der zweideutigen Reihe und C_1 die von ihm an K gehende Tangente, welche P in γ trifft, so wird, wenn c_1 dem Punkte c in der eindeutigen (in der Figur nicht vorhandenen, weil unnöthigen) Reihe entspricht, diesem Punkte c auch noch immer der Punkt c_2 entsprechen, in welchem die von γ an K gehende weitere Tangente C_2 den Träger T'' schneidet.

Die perspectivische Axe P der Tangenteninvolution schneidet den Constructionskreis K in zwei (reellen oder imaginären) Punkten v und ω. Wenn man in diesen Punkten die Kreistangenten V_{12} und W_{12} zieht, so sind diess die Doppeltangenten der Tangenteninvolution und treffen den Träger T'' der zweideutigen Reihe in zwei Punkten v_{12}, w_{12}, welches offenbar die Doppelpunkte der zweideutigen Reihe sind.

Jedem Punkt (wie z. B. a) der eindeutigen Reihe entspricht ein Punktepaar (a_1, a_2) der zweideutigen Reihe und diesem Punktepaar entspricht dann auf der Axe P ein Punkt (α), nämlich der Schnittpunkt des zugehörigen Tangentenpaares (A_1, A_2). Da diess auch umgekehrt der Fall ist, indem jedem Punkte auf P ein Punktepaar auf T'' und demgemäss ein Punkt der eindeutigen Reihe entspricht, so ist klar, dass die eindeutige Punktreihe $a, b, c \ldots$ mit der Punktreihe $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ ein-eindeutig oder projectivisch liegt. In der That ist in Fig. 7 (Taf. I) die Punktreihe $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ mit der Punktreihe auf T'' in einzweideutiger Beziehung und folglich mit $a, b, c \ldots$ in Projectivität. Soll also zu einem Punkte x der eindeutigen Reihe das entsprechende Punktepaar $x_1 x_2$ der zweideutigen Reihe construirt werden, so bestimme man (mittelst der Directionsaxe) den dem x auf P entsprechenden Punkt ξ und ziehe von ihm an K die beiden Tangenten X_1 X_2, welche T'' in x_1 und x_2 schneiden.

Die practische Verwendung dieser Methode nimmt sich nun folgendermaassen aus.

Sei Fig. 8 (Taf. I) T' der Träger und a, b, c, d vier Punkte der eindeutigen Reihe; und T'' der Träger und a_1, b_1, c_1, d_1 die vier entsprechenden Punkte der zweideutigen Reihe. Von beiden Reihen setzen wir die reducirte Lage voraus, wesshalb sich der gemeinschaftliche Punkt einmal selbst entspricht und einem fünften Paare äquivalent ist. Der gemeinsame Punkt ist daher mit g und g_1 bezeichnet.

Von dem Reductionskegelschnitt R haben wir nun fünf Tangenten: T'', aa_1, bb_1, cc_1, dd_1, welche wir der Reihe nach mit den Ziffern 3, 1, 5, 2, 4 bezeichnen wollen und es wird unsere nächste Aufgabe sein, die Punktepaare, welche zweien von den vier Punkten der eindeutigen Reihe entsprechen, z. B. die den Punkten a und b entsprechenden Punktepaare zu vervollständigen. Wir wissen, dass dem Punkte a ausser a_1 noch ein zweiter Punkt a_2 entspricht, welchen wir

eben benöthigen. Diesen Punkt a_2 finden wir aber durch Construction der zweiten von a aus an den Reductionskegelschnitt R gehenden Tangente. Bezeichnen wir dieselbe mit 6, so kann man auf das dem Reductionskegelschnitt R umschriebene Sechsseit 1 2 3 4 5 6 den Satz von Brianchon anwenden, was eine einfache Construction dieser Tangente liefert. Man zieht nämlich die Linien $\overline{(12)(45)}$, $\overline{(34)(61)}$ [wobei (61) der Schnitt von 6 und 1, also der Punkt a ist] und verbindet den Schnittpunkt mit dem Punkte (2 3); wird der Schnitt der letztgezogenen Linie mit 5 gesucht und dann mit a verbunden, so ist diese Verbindungslinie die gesuchte Tangente, welche die zweideutige Reihe T'' in dem verlangten Punkte a_2 trifft.

In derselben Weise wird der Punkt b_2 construirt, welcher mit b_1 das dem b entsprechende Punktepaar bildet; man zieht nämlich die zweite von b aus an R gehende Tangente, welche T'' in b_2 schneidet. Die Bezeichnung der Tangenten bleibt dieselbe, nur wird die unbekannte Tangente jetzt wieder mit 6 bezeichnet und an die Stelle von a tritt b. Man sucht also den Schnitt der Linien $\overline{(12)(45)}$ und $\overline{(23)(56)}$ [wobei (56) der Schnitt von 5 mit 6, also der Punkt b ist], verbindet ihn mit dem Punkte (34) und dann den Schnittpunkt dieser letztgezogenen Linie und 1 verbindet man mit b, was die gesuchte zweite Tangente und ebenso den Punkt b_2 liefert.

Von der Involution auf T'' besitzt man nun zwei Punktepaare: $a_1\,a_2$, $b_1\,b_2$ und kann sie vervollständigen. Zu dem Ende legt man tangirend an T'' den beliebigen Constructionskreis K, und von den Punkten a_1, a_2, b_1, b_2 an ihn die Tangentenpaare A_1, A_2, B_1, B_2, welche in ihrem Schnitte das Punktepaar α, β liefern. Die Linie $\alpha\beta$ ($= P$) ist dann die perspectivische Axe der auf K entstehenden Tangenteninvolution. Wird auch von c_1 an K die Tangente C_1 gezogen, welche P in γ trifft und dann von γ an K die zweite Tangente C_2; so trifft diese den Träger T'' im Punkte c_2. Ebenso kann man d_2 construiren. Die Punktreihe $a, b, c \ldots$ auf der eindeutigen Reihe ist nun nach Früherem projectivisch mit der Punktreihe $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ auf der Involutionsaxe P und man wird mit Vortheil ihre Directionsaxe Δ verwenden können.

Diese Directionsaxe ist die Verbindungslinie Δ der drei Punkte $(a\beta)\,(b\alpha)$[1]), $(b\gamma)\,(c\beta)$; $(c\alpha)$, $(a\gamma)$. Will man nun zu einem Punkte x der eindeutigen Reihe das entsprechende Punktepaar $x_1\,x_2$ auf der zweideutigen Reihe construiren, so suche man vorerst den, dem x auf P projectivisch entsprechenden Punkt ξ. Diess geschieht, wenn man z. B. αx zieht und den Schnitt von αx und Δ mit a verbindet, welche Verbindungslinie P in ξ trifft. Von ξ aus gehen nun an den Kreis

[1]) Der Punkt $(a\beta)\,(b\alpha)$ ist der Schnittpunkt von $\overline{a\beta}$ mit $\overline{b\alpha}$.

K zwei Tangenten X_1, X_2, welche T'' in dem gesuchten Punktepaare $x_1\, x_2$ treffen. Statt a könnte man bei der Construction von ξ ebenso gut b oder c u. s. w. verwenden. Ebenso leicht wird man den Weg erkennen, um zu einem Punkte x_1 der zweideutigen Reihe den entsprechenden Punkt x der eindeutigen Reihe zu finden.

Zieht man in den beiden Punkten v und ω, in welchen der Constructionskreis K von der Involutionsaxe P geschnitten wird, die beiden Tangenten V_{12}, W_{12}, so treffen diese den Träger T'' in den beiden Doppelpunkten v_{12}, w_{12}; die dem Punktepaare v, ω auf T' projectivisch entsprechenden und leicht construirbaren Punkte v und w sind die beiden Verzweigungspunkte der eindeutigen Reihe.

Die beiden Reihen $a, b, c \ldots$ und $\alpha, \beta\, \gamma \ldots$ müssen, weil T' und T'' in reducirter Lage sind, eine solche gegenseitige Lage besitzen, dass wenn man zu g den entsprechenden Punkt γ sucht und von ihm an K die Tangenten zieht, eine von ihnen abermals durch g hindurchgeht. Aehnliches gilt von den Büscheln in Fig. 6 (Taf. I).

21. Wir haben in den beiden vorhergehenden Artikeln die Vervollständigung zweier einzweideutigen Gebilde dadurch vorgenommen, dass wir das zweideutige mit einem eindeutigen Hülfsgebilde $(\alpha, \beta\, \gamma \ldots)$ in einzweideutige Beziehung setzten. Dieses Hülfsgebilde $(\alpha, \beta, \gamma \ldots)$ war dann mit dem ursprünglich gegebenen eindeutigen Gebilde projectivisch.

Es entsteht nun die Frage, ob man den dabei verwendeten Constructionskreis K nicht in eine solche Speziallage bringen könnte, dass dieses Hülfsgebilde mit dem eindeutigen Gebilde perspectivisch läge.

Es ist nun in der That möglich eine solche Anordnung zu erzielen.

Zunächst für Strahlenbüschel.

Seien Fig. 9 (Taf. II) t' und t'' die Scheitel der beiden resp. einzwei-deutigen Büschel, von denen wir auch jetzt noch die reducirte Lage voraussetzen wollen. Die beiden Büschel werden dann durch vier Strahlenpaare bestimmt sein, und man wird, wie dies schon betreffenden Ortes (Art. 19) gelehrt wurde, zwei Strahlenpaare des zweideutigen Büschels, welche zweien Strahlen des eindeutigen entsprechen, in linealer Weise vervollständigen können. Nehmen wir an, diess wäre schon geschehen, und es entspräche dem Strahle A das Strahlenpaar $A_1\, A_2$, sowie dem Strahle B das Strahlenpaar $B_1\, B_2$.

Nun sind beide Büschel bestimmt; denn der gemeinsame Strahl entspricht sich einmal selbst, weshalb er $G G_1$ genannt wurde, und man hat nun fünf Strahlenpaare: GG_1, AA_1, AA_2, BB_1, BB_2.

Der Strahl A z. B. schneidet das ihm entsprechende Strahlenpaar $A_1\, A_2$ in einem Punktepaar $a_1\, a_2$. Nun lege man den Constructionskreis so, dass er der, dem Dreiecke $a_1\, a_2\, t''$ umschriebene Kreis wird. Auf diesem Constructionskreise K bestimmt nun das Strahlenpaar $A_1\, A_2$

das Punktepaar $a_1 a_2$, das Strahlenpaar $B_1 B_2$ ein weiteres Punktepaar $b_1 b_2$ und der Strahl G_1 (oder G) den Punkt g_1. Von der Punktinvolution auf K haben wir nun diese zwei Punktepaare. Zieht man also $a_1 a_2$, d. i. A, so erhält man den Strahl α, und zieht man $b_1 b_2$, so erhält man den Strahl β des eindeutigen Hülfsbüschels, dessen Scheitel der Schnitt p von α und β ist. Verbindet man schliesslich g_1 mit p, so ergibt sich der Strahl $\varkappa$, welcher K in g_2 zum zweiten male schneidet, was dann den zweiten Strahl G_2 liefert.

Das Strahlenbüschel A, B, G ist nun mit dem Strahlenbüschel $\alpha, \beta, \varkappa$ projectivisch und weil überdiess zwei entsprechende Strahlen A und α zusammenfallen, so sind beide Büschel perspectivisch, wesshalb sich entsprechende Strahlen in Punkten einer Geraden (des perspectivischen Durchschnitts) S schneiden müssen. Von dieser Geraden haben wir zwei Punkte; nämlich erstens den Schnitt von B mit β und zweitens den Schnitt g_1 von G mit $\varkappa$. Verbindet man somit diese beiden Punkte, so erhält man den perspectivischen Durchschnitt S beider Büschel.

Um nun zu einem Strahle X des eindeutigen Büschels das entsprechende Strahlenpaar $X_1 X_2$ im zweideutigen zu construiren, verbinde man den Schnitt von χ und S mit p, was den dem X entsprechenden Strahl ξ liefert. Dieser letztere schneidet den Constructionskreis K in dem Punktepaare $x_1 x_2$, so dass dann $x_1 t'' = X_1$ und $x_2 t'' = X_2$ die beiden gesuchten Strahlen sind.

Von p aus gehen an K zwei (reelle oder imaginäre) Tangenten v und ω, welche den Kreis in v_{12} und w_{12} berühren. Die Strahlen $t'' v_{12}$ und $t'' w_{12}$ sind dann die Doppelstrahlen des zweideutigen Büschels und die Verbindungslinien der beiden Schnitte von v, ω und S mit t' sind die dem v und ω entsprechenden Strahlen V und W des eindeutigen Büschels, d. i. die Verzweigungsstrahlen desselben.

Dasselbe für zwei reducirte einzweideutige Punktreihen.

Sind Fig. 10 (Taf. II) T' und T'' die beiden Träger derselben und $g g_1$ das im gemeinschaftlichen Punkte vereinigte Punktepaar, so denke man sich wie bei den Büscheln die zwei, den Punkten a und b entsprechenden Punktepaare $a_1 a_2$, $b_1 b_2$ bestimmt. Der Punkt a liefert mit dem ihm entsprechenden Punktepaar $a_1 a_2$ ein Strahlenpaar $A_1 A_2$, und nun nehme man den Constructionskreis so an, dass er neben T'' noch die beiden Strahlen $A_1 A_2$ berührt, dass er also ein dem Dreieck $a\, a_1 a_2$ eingeschriebener Kreis wird. Die Punktepaare $a_1 a_2$, $b_1 b_2$ bestimmen nun mit dem Kreise zwei Tangentenpaare $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ einer Tangenteninvolution und somit sind die Schnittpunkte α, β dieser zwei Tangentenpaare zwei Punkte der Involutionsaxe. Zieht man die Linie $\alpha \beta$ oder P, so ist diess die Axe der Involution. Von g_1 (oder g) geht an K eine Tangente G_1, welche P in $\varkappa$ schneidet; von diesem Punkte

geht an K noch die zweite Tangente G_2, welche T' in dem zweiten, dem g entsprechenden Punkte g_2 schneidet. Nun ist die Punktreihe $a, b, g \ldots$ projectivisch mit der Punktreihe $\alpha, \beta, \varkappa, \ldots$ und weil sich zwei entsprechende Punkte a und α decken, so sind beide Reihen überdiess perspectivisch, wesshalb die Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte durch einen festen Punkt (das perspectivische Centrum der beiden Reihen) s gehen müssen. Zieht man also die Linie $g\varkappa$, d. i. G_1 und dann die Verbindungslinie von b und β, so schneiden sich diese in dem perspectivischen Centrum s.

Soll nun zu einem beliebigen Punkte x der eindeutigen Reihe das entsprechende Punktepaar $x_1\, x_2$ der zweideutigen construirt werden, so verbinde man x mit s, welche Linie P in dem, x entsprechenden Punkte ξ schneidet. Von ξ aus gehen an K die beiden Tangenten $X_1\, X_2$, welche T' in dem gesuchten Punktepaare $x_1\, x_2$ treffen. Zieht man in den zwei Punkten ν, ω, in welchen K von P geschnitten wird, an K die beiden Tangenten V_{12}, W_{12}, so schneiden diese die zweideutige Reihe in den beiden Doppelpunkten $v_{12}\, w_{12}$ derselben. Die Strahlen $s\nu$ und $s\omega$ bestimmen schliesslich auf T die beiden den Doppelpunkten entsprechenden Punkte v und w, d. i. die Verzweigungspunkte der eindeutigen Reihe.

22. Nachdem wir die Vervollständigung zweier einzweideutigen Gebilde, wenn sie sich in reducirter Lage befinden, zur Genüge besprochen haben, wollen wir uns zu der Vervollständigung solcher Gebilde in allgemeiner Lage und zwar zunächst zu jener von Büscheln wenden.

Sind Fig. 11 (Taf. II) t' und t'' die Scheitel zweier einzweideutigen Büschel in allgemeiner Lage, so kann man fünf Strahlen des einen irgend fünf Strahlen des anderen als entsprechend zuordnen.

Seien also A, B, C, D, E fünf Strahlen des eindeutigen Büschels t', welchen die fünf Strahlen A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 des zweideutigen Büschels entsprechen sollen. (Es wird jedem Strahle des eindeutigen, z. B. A ausser dem gegebenen A_1 noch ein zweiter A_2 entsprechen.) Um zwei solche Büschel vervollständigen zu können, wird man sie in reducirte Lage zu bringen suchen. Diess könnte beispielsweise durch eine Ortsveränderung (etwa Drehung) bewerkstelligt werden.

Würde man z. B. beide Büschel um ihre Scheitel so lange drehen, bis das Strahlenpaar $A\,A_1$ übereinanderfällt, so wären die Büschel in reducirter Lage, könnten nach Früherem vervollständigt werden und die so construirten Strahlenpaare durch eine Gegendrehung in ihre ursprüngliche Lage gebracht werden.

Man kann jedoch durch folgende Betrachtung ein einfacheres Verfahren der Vervollständigung ermitteln. Schnitte man das zweideutige Büchel t'' mit einer beliebigen Transversale T'', so erhielte man auf T'' eine Punktreihe, welche mit dem Büschel t' in einzweideutiger Be-

ziehung steht. Dem Strahle A des Büschels t' wird auf T'' jenes Punktepaar entsprechen, in welchem T'' von den, dem A entsprechenden Strahlen A_1, A_2 geschnitten wird. Wird nun überdiess das eindeutige Büschel mit einer Transversale T' geschnitten, so erhält man eine Punktreihe, welche mit der auf T'' erzeugten in einzweideutiger Beziehung ist. Durch jeden Punkt (a) der Reihe T' geht nämlich ein Strahl (A) des Büschels t', welchem in t'' ein Strahlenpaar ($A_1 A_2$) entspricht. Dieses Strahlenpaar trifft nun T'' in dem, dem Punkte (a) entsprechenden Punktepaar (a_1 a_2). Umgekehrt geht purch jeden Punkt (a_1) der Reihe T'' ein Strahl (A_1) des Büschels t'', welchem in t' ein einziger Strahl (A) entspricht, der den Träger T' in dem entsprechenden Punkte (a) schneidet. Sonach sind die beiden Reihen T' und T'' in einzweideutiger Beziehung, so zwar, dass T' die eindeutige und T'' die zweideutige Reihe ist.

„Schneidet man zwei einzweideutige Büschel t' und t'' durch zwei Transversalen T' und T'', so erhält man zwei einzweideutige Reihen und zwar wird aus dem eindeutigen Büschel die eindeutige und aus dem zweideutigen Büschel die zweideutige Reihe ausgeschnitten."

Sind A, B, C, D, E die fünf Strahlen des eindeutigen Büschels und A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 die ihnen entsprechenden des zweideutigen und schneidet man das erste durch die Transversale T', so möge durch A der Punkt a und ebenso durch B, C, D, E die resp. Punkte b, c, d, e auf T' erzeugt werden; durch die Strahlen A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 werden auf T'' die Punkte a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 bestimmt. Von den beiden einzweideutigen Reihen T' und T'' besitzt man nun fünf Punktepaare aa_1, bb_1, cc_1, dd_1, ee_1, wodurch die beiden Reihen ebenfalls bestimmt sind. Wenn nun dem Punkte x auf T' das Punktepaar x_1 x_2 entspricht, so entspricht dem Strahle $t'x$ ($= X$) das Strahlenpaar $t''x_1$ ($= X_1$), $t''x_2$ ($= X_2$) des eindeutigen Büschels.

Die beiden Punktreihen T' und T'' werden sich dann in reducirter Lage befinden, wenn im gemeinschaftlichen Punkte ein entsprechendes Punktepaar vereinigt ist. Diess wird dann geschehen, wenn man die beiden Transversalen T' und T'' durch den Schnittpunkt von einem der fünf gegebenen Strahlenpaare hindurchlegt. Würde man z. B. T' und T'' durch den Schnittpunkt von E mit E_1 legen, so kämen in diesen Schnittpunkt ebensowohl der Punkt e, als auch der Punkt e_1 zu liegen, d. h. in diesem Punkte würde ein entsprechendes Punktepaar vereinigt sein.

Statt nun die beiden Transversalen beliebig durch den Schnittpunkt von E und E_1 zu legen, können wir die beiden Strahlen E und E_1 selbst zu diesen Zwecken verwenden, Wir schneiden also das eindeutige Büschel t' (A, B, C, D, E) mittelst der Transversale E_1 in den

Punkten (a, b, c, d, e) der eindeutigen mit dem Büschel t' perspectivisch liegenden Punktreihe, und ebenso das zweideutige Büschel t'' $(A_1, B_1, C_1, D_1, E_1)$ mittelst der Transversale E in den Punkten $(a_1, b_1, c_1, d_1, e_1)$ der zweideutigen mit dem Büschel t'' perspectivisch liegenden Reihe.

Die beiden Reihen $a, b, c, d, e \ldots$ und $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 \ldots$ sind in einzweideutiger Beziehung und überdiess in reducirter Lage, weil in dem Schnittpunkte der beiden Transversalen E und E_1 der Punkt e mit seinem entsprechenden e_1 zusammenfällt. Man kann desshalb nach den vorgetragenen Prinzipien die beiden Punktreihen vervollständigen, wodurch auch die beiden Büschel vervollständigt werden. Die Enveloppe der beiden Hülfsreihen auf E und E_1 ist, weil sie sich in reducirter Lage befinden, ein Kegelschnitt R, nämlich ihr Reductionskegelschnitt. Da derselbe in Bezug auf die Büschel t' und t'' dieselbe Rolle spielt, wie das Directionszentrum bei der Vervollständigung zweier projectivischen Büschel, so können wir denselben wohl auch den „Directionskegelschnitt der beiden Büschel" nennen. Da jedoch der Directionskegelschnitt wesentlich von dem zu Hülfstransversalen angenommenem Strahlenpaare E, E_1 abhängt, so wollen wir ihn den „Directionskegelschnitt der beiden Büschel bezüglich des Strahlenpaares E, E_1" nennen.

Jedem Strahlenpaare entspricht ein Directionskegelschnitt; wir werden später sehen, dass alle Directionskegelschnitte drei feste Gerade berühren und die einzelnen Strahlen des zweideutigen Büschels, bezüglich deren sie genommen sind, in Punkten schneiden, welche auf zwei festen Strahlen des eindeutigen Büschels liegen.

Wir haben in der Figur den Directionskegelschnitt R bezüglich des Strahlenpaares EE_1 genommen, weil wir die beiden Büschel mittelst dieses Strahlenpaares geschnitten haben.

Von dem Directionskegelschnitt hat man nun fünf Tangenten; nämlich erstens den Träger E der zweideutigen Reihe und dann die vier Strahlen $\overline{aa_1}, \overline{bb_1}, \overline{cc_1}, \overline{dd_1}$.

Bei der Vervollständigung der beiden Büschel, welche auf jene der beiden Hülfsreihen zurückkommt, treten zwei Aufgaben auf, nämlich:

1) Zu einem Strahle X_1 des zweideutigen Büschels den entsprechenden Strahl X des eindeutigen zu finden.

Jedem Strahle des zweideutigen Büschels entspricht im eindeutigen Büschel nur ein einziger Strahl, wesshalb die gestellte Aufgabe eine lineale sein wird.

Der Strahl X_1 trifft den Träger E der zweideutigen Hülfsreihe in einem Punkte x_1 und offenbar wird der dem X_1 entsprechende Strahl X den Träger E_1 der eindeutigen Hülfsreihe in dem, dem x_1 entsprechenden Punkte x treffen. Dieser lässt sich nun leicht — wie anderen Ortes auseinandergesetzt wurde — mittelst des Satzes von

Brianchon lineal construiren. Von x_1 geht nämlich an den Directionskegelschnitt R nur mehr eine Tangente ξ_1 (weil der Träger E selbst schon eine Tangente ist), welche E_1 in x schneidet. Man erhält diese Tangente ξ_1 in folgender Weise. Bezeichnet man die fünf Tangenten aa_1, bb_1, cc_1, dd_1, E des Directionskegelschnittes der Reihe nach mit den Ziffern 1, 5, 2, 6, 3 und die gesuchte Tangente ξ_1 mit 4, so ziehe man die Linien $\overline{(23)(56)}$, $\overline{x_1(61)}$ und verbinde deren Schnittpunkt mit dem Punkte (12). Diese Verbindungslinie wird die Tangente 5 in einem Punkte schneiden, welcher Punkt mit x_1 verbunden die gesuchte Tangente ξ_1 liefert. Die so construirte Gerade ξ_1 trifft mit E_1 in dem Punkte x zusammen; verbindet man schliesslich diesen Punkt x mit dem Scheitel t' des eindeutigen Büschels, so erhält man den verlangten Strahl X. Die Aufgabe ist somit gelöst.

Wendet man diese Constructionsart dazu an, um zu dem gemeinschaftlichen Strahle $\overline{t'\,t''}$ beider Büschel, indem man ihn zum zweideutigen rechnet, den entsprechenden im eindeutigen zu finden, so ergibt sich, dass derselbe die, von t' an den Directionskegelschnitt R gezogene Tangente sei. In der That fällt für den gemeinschaftlichen Strahl der Punkt x nach t' und folglich ist ξ_1 die von t' an R gehende Tangente (die zweite von t' an R gehende Tangente ist nämlich der Träger E der zweideutigen Hülfsreihe); da man nun ihren Schnittpunkt mit E_1 wieder mit t' verbinden soll, um den, dem gemeinsamen Strahle entsprechenden zu finden, so ist diese Tangente selbst der entsprechende Strahl.

Es ist nothwendig eine bestimmte Bezeichnung bezüglich des gemeinschaftlichen Strahles beider Büschel anzuwenden. Indem wir ihn zum eindeutigen Büschel rechnen, wollen wir ihn mit G bezeichnen; seine beiden, ihm in t'' entsprechenden Strahlen sind dann G_1 und G_2. Wenn wir ihn zum zweideutigen Büschel rechnen, so soll er mit L_1 bezeichnet werden. Dann entspricht ihm also im eindeutigen Büschel die von t' an den Directionskegelschnitt geführte Tangente L. Diesem Strahle L wird natürlich im zweideutigen Büschel ausser L_1 noch ein zweiter mit L_2 zu bezeichnender Strahl entsprechen.

Wurde nun zu dem Strahle X_1 der ihm entsprechende Strahl X construirt, so ist es ein Leichtes, den diesem X zweitentsprechenden Strahl X_2 des zweideutigen Büschels mittelst des Lineals zu construiren.

Man wird nämlich von dem Punkte x, von welchem an den Reductionskegelschnitt R die Tangente ξ_1 geht, noch die zweite an R gehende Tangente ξ_2 ebenso mittelst des Satzes von Brianchon construiren, wie diess bei ξ_1 vom Punkte x_1 aus geschehen ist. Diese zweite Tangente ξ_2 trifft nun E in x_2, welcher Punkt mit t'' verbunden den gesuchten Strahl X_2 liefert.

2) Zu einem Strahle Y des eindeutigen Büschels das entsprechende

Strahlenpaar Y_1 Y_2 des zweideutigen zu finden. Diese Aufgabe ist bereits eine quadratische und erheischt die Anwendung des Cirkels.

Der Strahl Y trifft die eindeutige Reihe auf E_1 im Punkte y, von welchem aus an den Directionskegelschnitt R zwei Tangenten η_1 und η_2 gehen. Diese mittelst Cirkel und Lineal aus den fünf bekannten Tangenten des Directionskegelschnitts zu construiren, ist eine bekannte Sache. Die beiden Tangenten η_1 und η_2 treffen die zweideutige Reihe E in dem Punktepaare y_1 y_2, welches mit t'' durch Geraden verbunden, das gesuchte Strahlenpaar Y_1 Y_2 liefert.

Aus diesem Constructionsverfahren lassen sich nun einzelne, für das Folgende wichtige Schlüsse ziehen. Erstlich entsprechen dem gemeinsamen Strahle beider Büschel, wenn man ihn zum eindeutigen Büschel rechnet und dem Uebereinkommen gemäss mit G bezeichnet, die beiden vom Scheitel t'' des zweideutigen Büschels an den Directionskegelschnitt gehenden Tangenden G_1, G_2.

Denn G trifft E_1 in t'', welcher Punkt also mit g zu bezeichnen wäre. Von diesem gehen an R die beiden Tangenten G_1, G_2, welche E in g_1 g_2 treffen; die Punkte g_1 g_2 mit t'' verbunden geben nun das dem G entsprechende Strahlenpaar; aber diese Verbindungslinien sind offenbar die Tangenten G_1 G_2 selbst.

Dem gemeinsamen Strahle der beiden Büschel entsprechen also, je nachdem man ihn zum eindeutigen oder zum zweideutigen Büschel rechnet, die beiden von t'' oder die von t' an R gehende Tangente.

„Es muss also der Directionskegelschnitt bezüglich jeden Strahlenpaares diese drei Tangenten: G_1, G_2 und L besitzen, weil dem gemeinsamen Strahle immer diese drei Strahlen entsprechen müssen.“

Zweitens können wir auch die Frage nach den Verzweigungsstrahlen und Doppelstrahlen beantworten.

Der Directionskegelschnitt R schneidet nämlich den Träger E_1 der eindeutigen Hülfsreihe in den beiden Verzweigungspunkten v und w derselben. Die von t' aus nach v und w gehenden Strahlen V und W sind die beiden Verzweigungsstrahlen des eindeutigen Büschels. Die in v und w an den Directionskegelschnitt R gezogenen Tangenten ν_{12} und ω_{12} sind die Doppeltangenten der auf R entstehenden Tangenteninvolution und treffen den Träger E der zweideutigen Reihe in den Doppelpunkten v_{12} und w_{12} dieser Hülfsreihe. Die von t'' nach v_{12} und w_{12} gezogenen Strahlen V_{12} und W_{12} sind daher die beiden Doppelstrahlen des zweideutigen Büschels.

„Der Directionskegelschnitt beider Büschel bezüglich irgend eines Strahlenpaares schneidet somit den dem zweideutigen Büschel angehörigen Strahl des Paares in jenen

zwei Punkten, in welchen dieser Strahl von den beiden Verzweigungsstrahlen getroffen wird.“

Um zu einem Strahle Y des eindeutigen Büschels das entsprechende Strahlenpaar Y_1, Y_2 im zweideutigen zu construiren, benöthigt man ausser des Lineals nur noch eines festen Kreises.

Um das wiederholte Kreisziehen zu vermeiden, ist es wichtig, die schon bei der reducirten Lage beider Büschel verwendete Constructionsmethode mittelst eines einzigen festen Kreises auch hier verwenden zu können. Das zweideutige Büschel bildet nämlich für sich eine quadratische Strahleninvolution, welche man auch unabhängig vom eindeutigen Büschel vervollständigen kann.

Seien Fig. 12 (Taf. II) abermals t' und t'' die Scheitel und AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, EE_1 die fünf Strahlenpaare der beiden einzweideutigen Büschel. Wir schneiden sie durch die Transversalen E_1 und E in den einzweideutigen, reducirt liegenden Punktreihen $a\,b\,c\,d\,e$, $a_1\,b_1\,c_1\,d_1\,e_1$. Um die im zweideutigen Büschel t'' auftretende Strahleninvolution behandeln zu können, benöthigen wir zwei Strahlenpaare derselben. Zu dem Ende construiren wir die beiden Strahlen A_2 und B_2, welche ausser A_1 und B_1 den Strahlen A und B des eindeutigen Büschels entsprechen.

Von dem Directionskegelschnitte R beider Büschel, welcher gleichzeitig der Reductionskegelschnitt der beiden auf E und E_1 erzeugten Hülfsreihen ist, besitzen wir die fünf Tangenten $\overline{aa_1}$, $\overline{bb_1}$, $\overline{cc_1}$, $\overline{dd_1}$ und E. Vom Punkte a aus geht an R ausser $\overline{aa_1}$ noch eine weitere Tangente $\overline{aa_2}$, welche E in dem, a neben a_1 entsprechenden Punkte a_2 trifft. Dasselbe gilt von b, von welchem aus an R noch die weitere Tangente $\overline{bb_2}$ gehen wird. Um diese Tangenten zu bestimmen, bezeichne man die fünf bekannten Tangenten des Reductionskegelschnitts: $\overline{aa_1}$, $\overline{bb_1}$, $\overline{cc_1}$, $\overline{dd_1}$, E der Reihe nach mit den Ziffern 1, 5, 2, 4, 3 und die jeweilig gesuchte sechste Tangente (also zunächst aa_2 und dann bb_2) mit der Ziffer 6. Wendet man nun auf das Sechsseit 1 2 3 4 5 6 den Satz von Brianchon an, so erhält man aus den fünf ersten Tangenten immer die sechste. Um z. B. die Tangente aa_2 zu construiren ziehe man durch den Schnittpunkt der beiden Linien $\overline{(12)\,(45)}$ und $\overline{(34)\,(61)}$ die nach dem Punkte (23) gehende Gerade und verbinde ihren Schnittpunkt mit 5 mit dem Punkte a, um die gesuchte Tangente zu erhalten. Dabei ist zu bemerken, dass der Punkt (61), d. i. der Schnitt der Linien 6 und 1 der Punkt a ist. Die so gefundene sechste Tangente trifft E im Punkte a_2, welcher mit t'' verbunden, den gesuchten Strahl A_2 liefert. Um die zweite von b aus an R gehende Tangente zu finden, bedenke man, dass die eine von b ausgehende und bekannte Tangente die mit 5 bezeichnete Linie bb_1 ist. Man kann also auch jetzt die gesuchte sechste Tangente mit 6

bezeichnen. Um sie wirklich zu construiren, ziehe man durch den Schnitt von $\overline{(12)\,(45)}$ und $\overline{(23)\,(56)}$ [wobei $56 = b$ ist] die nach (34) gehende Linie und verbinde den Punkt, wo sie 1 schneidet mit b, so hat man die gesuchte Tangente. Diese schneidet F in b_2. Verbindet man b_2 mit t'', so erhält man den Strahl B_2. Nun besitzt man von der Involution im zweideutigen Büschel zwei Strahlenpaare $A_1\,A_2$, $B_1\,B_2$ und kann die Involution mittelst eines Constructionskreises vervollständigen.

In der Figur 12 (Taf. II) wurde der Constructionskreis, welcher durch den Scheitel t'' des zweideutigen Büschels gehen muss, mit K bezeichnet. Die beiden Strahlenpaare $A_1\,A_2$, $B_1\,B_2$ bestimmen auf ihm zwei Punktepaare $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}_2$ einer Punktinvolution, deren Verbindungslinien $\overline{\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2}, \overline{\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}_2}\,(=\alpha, \beta)$ sich in dem zugehörigen Involutionscentrum p schneiden.

Nun kann man sehr leicht zu einem Strahle des eindeutigen Büschels das entsprechende Strahlenpaar des zweideutigen vervollständigen. Der Strahl C_1 z. B. schneidet den Constructionskreis K im Punkte $\mathfrak{c}_1$; verbindet man nun $\mathfrak{c}_1$ mit p durch den Strahl γ, bis K wieder in $\mathfrak{c}_2$ geschnitten wird, so gibt die Verbindungslinie von t'' mit $\mathfrak{c}_2$ den zweiten Strahl C_2.

Die Strahlen $\alpha, \beta, \gamma \ldots$, welche aus dem Involutionscentrum p die Punktpaare $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{c}_2$ u. s. w. projiciren, bilden ein Strahlenbüschel, welches mit dem eindeutigen Büschel $A, B, C, \ldots$ projectivisch ist. Es entspricht dabei dem Strahle A der Strahl α, dem Strahle B, β u. s. w.

Dieses Hülfsstrahlenbüschel lässt sich nun vortheilhaft zur Vervollständigung beider Büschel verwenden.

Zu dem Behufe construire man sich zunächst das Directionscentrum $\varDelta$ der beiden projectivischen Büschel t' und p. Dieses Directionscentrum ist der Schnittpunkt der drei Strahlen $\overline{(A\beta)\,(B\alpha)}$, $\overline{(B\gamma)\,(C\beta)}$, $\overline{(C\alpha)\,(A\gamma)}$.

Nun kann man mit Leichtigkeit folgende zwei Aufgaben lösen:

1) Zu einem Strahle X_1 den entsprechenden Strahl X zu finden.

Der Strahl X_1 trifft den Constructionskreis im Punkte $\mathfrak{x}_1$, welcher Punkt mit p verbunden den Strahl ξ liefert. Sucht man in t' den zu ξ projectivisch entsprechenden Strahl, so ist das der gesuchte Strahl X. Zu dem Ende verbinde man den Schnittpunkt (ξB) mit $\varDelta$, bis β geschnitten wird und diesen Schnittpunkt mit t', so ist diese Verbindungslinie der gesuchte Strahl X.

2) Zu einem Strahle Y des eindeutigen Büschels das entsprechende Strahlenpaar Y_1, Y_2 zu finden.

Man construire zu Y den in p projectivisch entsprechenden Strahl η, indem man $(Y\alpha)$ mit $\varDelta$ verbindet, bis A geschnitten wird und diesen Schnittpunkt mit p verbindet, was den Strahl η liefert.

Dieser Strahl η schneidet den Constructionskreis K in dem Punktepaare $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2$; verbindet man dieses Punktepaar mit t'', so erhält man das Strahlenpaar Y_1, Y_2.

Ebenso kann man die Verzweigungs- und Doppelstrahlen leicht construiren. Von p gehen nämlich an den Constructionskreis K die beiden Tangenten ν und ω, welche ihn in den Doppelpunkten $\mathfrak{v}_{12}\,\mathfrak{w}_{12}$ der auf K auftretenden Punktinvolution berühren. Die Strahlen $t''\,\mathfrak{v}_{12}$ und $t''\,\mathfrak{w}_{12}$ sind die beiden Doppelstrahlen V_{12}, W_{12} des zweideutigen Büschels.

Um die Verzweigungsstrahlen des eindeutigen Büschels zu finden, hat man nur zu ν und ω die in t' projectivisch entsprechenden Strahlen V und W mittelst des Directionscentrums Δ auf bekannte Weise zu construiren.

Man kann nun, wie in Art. 21 den Constructionskreis (statt beliebig durch t'') so legen, dass er durch das Schnittpunktepaar des Strahles A mit dem entsprechenden Strahlenpaare A_1, A_2 hindurchgeht. Dann wird α mit A zusammenfallen und die beiden Büschel $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ und $A, B, C \ldots$ sind perspectivisch. Ihre Vervollständigung ist in diesem Falle ungemein einfacher, weil sich entsprechende Strahlen auf Punkten einer Geraden schneiden, von welcher man durch die beiden Strahlenpaare B, β und C, γ zwei Punkte erhält.

Es braucht wohl nicht bemerkt zu werden, wie man nach dieser Methode mittelst des Constructionskreises die dem gemeinschaftlichen Strahle entsprechenden Strahlen construiren wird.

Aufgabe: Man construire den Strahl des eindeutigen Büschels, welchem im zweideutigen ein rechtwinkeliges Strahlenpaar entspricht.

23. So wie bei Strahlenbüscheln, so kann man auch bei der Vervollständigung zweier einzweideutigen Punktreihen in allgemeiner Lage einen doppelten Weg einschlagen. Sind Fig. 13 (Taf. II) T' und T'' die Träger der beiden einzweideutigen Punktreihen, sowie $aa_1, bb_1, cc_1, dd_1, ee_1$ fünf Paar entsprechender Elemente, so nehmen wir e zum Scheitel eines über der zweideutigen Reihe stehenden Büschels A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 und e_1 zum Scheitel eines über der eindeutigen Reihe stehenden Büschels A, B, C, D, E. Diese zwei Büschel sind nun wegen ihrer Lage in einzweideutiger Beziehung gegen einander. Und zwar ist das Büschel vom Scheitel e das zweideutige und das Büschel e_1 das eindeutige.

Die beiden Büschel sind jedoch überdiess in reducirter Lage, weil sich in der Geraden $\overline{ee_1}$ die beiden entsprechenden Strahlen E und E_1 decken. Ihr Durchschnitt ist somit ein Kegelschnitt, nämlich ihr Reductionskegelschnitt R.

Da nun dieser Kegelschnitt bezüglich der beiden, ursprünglich gegebenen Reihen dieselbe Rolle spielt, wie die Directionsaxe bei der

Vervollständigung zweier projectivischen Punktreihen, so mag er fortan wohl auch „der Directionskegelschnitt der beiden Reihen T und T' bezüglich des Punktepaares ee_1“ genannt werden.

Der Zusatz „bezüglich des Punktepaares ee_1“ deutet an, dass der Directionskegelschnitt wesentlich von dem zu Scheiteln der Hülfsbüschel verwendeten Punktepaare (ee_1) abhängt. Aber auch hier sind die, den verschiedenen Punktepaaren entsprechenden Directionskegelschnitte gewissen gemeinsamen Bedingungen unterworfen. Sie gehen nämlich sämmtlich durch drei feste Punkte, und die Tangenten von den, der zweideutigen Reihe angehörigen Punkten der einzelnen Paare an dieselben, gehen durch zwei feste Punkte der eindeutigen Reihe.

Von dem Directionskegelschnitt R hat man die fünf Punkte (AA_1), (BB_1), (CC_1), (DD_1), e. Der Punkt e gehört dem Directionskegelschnitte als Scheitel des zweideutigen Büschels an.

Die Vervollständigung beider Büschel erfordert nun die Lösung folgender zwei Aufgaben:

1) Zu einem Punkte x_1 der zweideutigen Reihe den entsprechenden Punkt x der eindeutigen Reihe zu bestimmen.

Verbindet man e mit x_1, so erhält man den entsprechenden Strahl X_1 des zweideutigen Büschels und hat seinen Schnittpunkt ξ_1 mit dem Directionskegelschnitte R zu suchen. Diess geschieht in linealer Weise mit Benützung des Paskalschen Satzes ebenso einfach, wie diess bei den Büscheln in Art. 22 gelehrt wurde.

Bezeichnet man nämlich die Punkte (AA_1), (BB_1), (CC_1), (DD_1), e des Directionskegelschnittes mit den Ziffern 1, 5, 2, 6, 3 und den unbekannten Schnitt ξ_1 von X_1 mit R durch 4; so ziehe man die Linien $\overline{(23)\,(56)}$, $\overline{(34)\,(61)}$ [wobei (34) der Strahl X_1 ist] und verbinde ihren Schnitt mit (12), mit dem Punkte 5. Die letztgenannte Verbindungslinie trifft dann X_1 in dem gesuchten Durchschnittspunkte ξ_1.

Der Strahl $e_1\,\xi_1 = X$ entspricht dann im eindeutigen Hülfsbüschel dem Strahle X_1 und schneidet die eindeutige Reihe im gesuchten Punkte x.

2) Zu einem Punkte y der eindeutigen Reihe das entsprechende Punktepaar y_1, y_2 der zweideutigen Reihe zu construiren.

Verbindet man y mit e_1, so erhält man den Strahl Y; dieser trifft den Directionskegelschnitt R in dem Punktepaare η_1, η_2, welches mit e verbunden das Strahlenpaar Y_1, Y_2 liefert. Das Strahlenpaar Y_1, Y_2 entspricht dem Strahle Y und schneidet daher die zweideutige Reihe T' in dem gesuchten Punktepaar $y_1\,y_2$.

Die Aufgabe ist bereits quadratisch und ohne Zuhülfenahme des Cirkels nicht lösbar.

Betrachten wir nun den gemeinschaftlichen Punkt beider Reihen, d. i. den Schnittpunkt von T und T'. Denselben kann man einmal

zur eindeutigen und das anderemal zur zweideutigen Reihe rechnen. Im ersten Falle werden wir ihn mit g und im zweiten Falle mit l_1 bezeichnen.

Es frägt sich, welche Punkte entsprechen diesem gemeinschaftlichen Punkte beider Reihen? Rechnet man ihn zunächst zur zweideutigen Reihe (wo er mit l_1 zu bezeichnen ist), so lässt sich leicht aus der angegebenen Vervollständigungsart ableiten, dass ihm in der eindeutigen Reihe der zweite Schnittpunkt l des Directionskegelschnittes R mit dem Träger T' entsprechen müsse.

Rechnet man ihn zur eindeutigen Reihe, so heisst er g und es entsprechen ihm (wie ebenso einfach zu ersehen ist) die beiden Schnittpunkte g_1, g_2 des Trägers T'' mit dem Directionskegelschnitte R. Endlich entsteht noch die Frage nach den Verzweigungspunkten der eindeutigen und den ihnen entsprechenden Doppelpunkten der zweideutigen Reihe.

Vom Scheitel e_1 des eindeutigen Büschels gehen an den Directionskegelschnitt R zwei (reelle oder imaginäre) Tangenten V und W, welche denselben in den Doppelpunkten v_{12} und w_{12} der auf R entstehenden Punktinvolution berühren. Daher sind die nach diesen Punkten v_{12} und w_{12} von e ausgehenden Strahlen V_{12}, W_{12} die Doppelstrahlen des zweideutigen Hülfsbüschels und die ihnen entsprechenden Strahlen V und W sind die Verzweigungsstrahlen des eindeutigen Hülfsbüschels.

Die Verzweigungsstrahlen V und W treffen die eindeutige Reihe T' in den Verzweigungspunkten v und w, und die Doppelstrahlen V_{12}, W_{12} treffen die zweideutige Reihe T'' in den Doppelpunkten v_{12} und w_{12} derselben.

Da die Punkte l, g_1, g_2, v, w immer dieselben bleiben müssen, welches Punktepaar man auch zu Scheiteln der Hülfsbüschel nehmen möge, so ist das über die Lage sämmtlicher Directionskegelschnitte Gesagte vollkommen gerechtfertigt.

Bei der Bestimmung des einem Punkte y der eindeutigen Reihe entsprechenden Punktepaares y_1, y_2 der zweideutigen Reihe hat man eine Aufgabe des zweiten Grades aufzulösen, wozu die Hülfe des Cirkels neben jener des Lineals unumgänglich nöthig ist.

Um für jede beliebige Lage des Punktes y mit einem ein für allemal gezogenen Kreise auszureichen, kann man folgenden bei der Vervollständigung einzweideutiger Büschel im vorigen Artikel angegebenen Weg einschlagen.

Wenn in Figur 14 (Taf. II) die beiden auf T' und T'' befindlichen Punktreihen a, b, c, d, e und a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 gegeben sind, so wird man sich vor allem zwei Punktepaare der auf T'' auftretenden Involution vervollständigen. Dem Punkte a nämlich entspricht ausser a_1

noch ein zweiter Punkt a_2, welchen zu construiren wir genöthigt sein werden. Ebenso werden wir den Punkt b_2 zu bestimmen haben, welcher neben b_1 dem b entspricht.

Diess geschieht in folgender Art.

Nimmt man ein Punktepaar — wir wollen wieder die Punkte e und e_1 nehmen — zu Scheiteln zweier Büschel, welche über den beiden Reihen stehen, so werden diess zwei einzweideutige Büschel in reducirter Lage sein.

Man ziehe also von e aus nach a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 die Strahlen A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 und von e_1 aus nach a, b, c, d, e die Strahlen A, B, C, D, E (genau so, wie es zu Anfang dieses Artikels geschah), so erhält man dadurch fünf Strahlenpaare zweier einzweideutigen Büschel, welche überdiess reducirt sind, weil im gemeinschaftlichen Strahle sich ein Paar entprechender Strahlen (E, E_1) deckt. Von dem Reductionskegelschnitte R (welches der Directionskegelschnitt beider Reihen bezüglich des Punktepaares e, e_1 ist) besitzen wir die Punkte $(AA_1) = 1$, $(BB_1) = 5$, $(CC_1) = 2$, $(DD_1) = 4$ und den Scheitel e des zweideutigen Büschels, welchen wir mit 3 bezeichnen wollen.

Der Strahl A schneidet den Kegelschnitt R ausser im Punkte 1 noch in einem weiteren Punkte, welcher uns mit e verbunden den Strahl A_2 und so auch den Punkt a_2 liefert. Um diesen zweiten Schnittpunkt des Strahles A mit dem Reductionskegelschnitt R zu finden, bezeichne man ihn in Gedanken mit der Ziffer 6 und wende auf das Sechseck 1 2 3 4 5 6 den Pascal'schen Satz an.

Diess gibt folgende Construction des Punktes 6. Man ziehe die Linie $\overline{(12)(45), (34)(61)}$ [wobei (61) die Verbindungslinie von 6 mit 1, d. h. der Strahl A ist] und schneide sie mit der Linie (23). Verbindet man den erhaltenen Schnittpunkt mit 5, so schneidet die letztgezogene Linie den Strahl A in dem gesuchten Punkte. Wird nun dieser mit e verbunden, so erhält man den Strahl A_2 und wo dieser die zweideutige Reihe schneidet, ist der Punkt a_2.

Ebenso construirt man den Punkt b_2.

Der Strahl B schneidet nämlich R ausser in 5 noch in einem weiteren Punkte, der mit 6 bezeichnet werden soll. Zieht man jetzt die Linie $\overline{(12)(45), (23)(56)}$ [wobei (56) die Verbindungslinie von 5 mit 6, d. h. der Strahl B ist] und verbindet man den Punkt, wo sie durch (34) geschnitten wird, mit 1; so schneidet die letztgezogene Linie den Strahl B im Punkte 6. — Dieser mit e verbunden, gibt den Strahl B_2, welcher T' in b_2 schneidet.

Nun hat man von der auf T' befindlichen Punktinvolution zwei Punktepaare $a_1\, a_2$, $b_1\, b_2$ und kann mittelst derselben in folgender Weise weiter operiren.

An T' tangirend legt man den sonst beliebigen Constructionskreis

K, welcher ein für allemal festgezogen ist — und an ihn legt man durch die zwei Punktepaare $a_1\, a_2$, $b_1\, b_2$ die beiden Tangentenpaare $\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_2$, welche sich in dem Punktepaar α, β schneiden ($\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}_2$ liefert α, $\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_2$ liefert β).

Die Gerade $\overline{\alpha\beta}$, welche mit P bezeichnet wurde, ist die Axe der auf K existirenden Tangenteninvolution.

Will man z. B. zum Punkte c_1 den paarig zugehörigen Punkt c_2 finden, so lege man von c_1 an K die Tangente $\mathfrak{C}_1$, welche P in γ schneidet und von γ an K die Tangente $\mathfrak{C}_2$, welche T' in c_2 schneidet.

Auf P entsteht so eine Punktreihe $\alpha, \beta, \gamma \ldots$, welche mit der Punktreihe $a, b, c \ldots$ projectivisch ist. Von beiden Reihen kennen wir nun drei Paar entsprechender Punkte $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ und können daher zu jedem vierten Punkte der einen Reihe den entsprechenden Punkt der anderen construiren.

Diess werden wir auch mit grossem Vortheile zur Vervollständigung der beiden einzweideutigen Punktreihen T und T' benützen.

Zunächst wichtig ist die Directionsaxe der beiden projectivischen Reihen auf T und P. Es ist diess die Verbindungslinie $\varDelta$ der drei Punkte $(a\beta)\,(b\alpha)$, $(b\gamma)\,(c\beta)$, $(c\alpha)\,(a\gamma)$. Nachdem man diese Directionsaxe $\varDelta$ gezeichnet hat, kann man leicht folgende zwei, die Vervollständigung der beiden Reihen betreffende Aufgaben lösen:

1) Zu einem Punkte x_1 der zweideutigen Reihe den entsprechenden Punkt x der eindeutigen zu construiren.

Man ziehe von x_1 die einzige an den Constructionskreis K gehende Tangente x_1, welche P in ξ schneidet. Der dem Punkte ξ auf T projectivisch entsprechende Punkt, ist der gesuchte Punkt x. Man findet ihn, indem man z. B. den Schnitt von $\overline{\xi b}$ und $\varDelta$ mit β verbindet und diese Verbindungslinie mit T zum Schnitte bringt.

2) Zu einem Punkte y der eindeutigen Reihe das entsprechende Punktepaar y_1, y_2 der zweideutigen zu finden.

Man construire den, dem y auf P projectivisch entsprechenden Punkt η, indem man P mit der Verbindungslinie von b und dem Schnitt von $\overline{\beta y}$ und $\varDelta$ schneidet.

Von η aus gehen an den Constructionskreis K die beiden Tangenten $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Y}_2$, welche T' in dem gesuchten Punktepaar y_1, y_2 treffen.

Ebenso einfach kann man die Verzweigungs- und Doppelpunkte finden. Die Involutionsaxe P schneidet den Constructionskreis K in zwei (reellen oder imaginären) Punkten v und ω, von welchen aus an K zusammenfallende Tangentenpaare gehen. Die Tangenten dieser zwei Punkte v und ω sind die Doppeltangenten $\mathfrak{V}_{12}$ und $\mathfrak{W}_{12}$ des involutorischen Tangentensystems und sie schneiden die zweideutige Reihe T' in den beiden Doppelpunkten v_{12} und w_{12} derselben. Die den beiden Punkten v und ω auf T projectivisch entsprechenden (nach

Früherem leicht construirbaren) Punkte v und w sind die beiden Verzweigungspunkte der eindeutigen Reihe.

Statt den Constructionskreis K beliebig zu zeichnen, kann man ihn wie in Art. 21 dem Dreiseite einschreiben, welches von T'', aa_1 und aa_2 gebildet wird.

Dadurch werden die beiden Punktreihen $a, b, c, \ldots \alpha, \beta, \gamma \ldots$ auf T' und P perspectivisch, wodurch die Construction einigermassen abgekürzt wird.

Aufgabe: Man construire den Punkt der eindeutigen Reihe, dessen entsprechendes Punktepaar eine gegebene Strecke auf T'' harmonisch theilt.

24. Sowie man zwei einzweideutige Gebilde auf die vorgetragene Art und Weise immer vervollständigen kann, sobald man fünf Paar entsprechender Elemente kennt, so wird man dieselben Methoden auch dann noch anwenden können, wenn die gegebenen Elemente spezieller Natur sind.

Zwei einzweideutige Gebilde können ausser durch fünf Paar entsprechender Elemente auch noch auf folgende Arten bestimmt werden:

1) Es sind gegeben drei Paar entsprechender Elemente, ein Verzweigungselement und das ihm entsprechende Doppelelement.

2) Es ist gegeben ein Paar entsprechender Elemente, die beiden Verzweigungselemente und die ihnen entsprechenden Doppelelemente.

3) Statt zwei Paar entsprechender Elemente kann im allgemeinen Falle, sowie im Falle (1) ein Element des eindeutigen und das ihm entsprechende Elementenpaar des zweideutigen Gebildes gegeben sein.

Schliesslich dürfte wohl noch der Fall zu erwähnen sein, wo an die Stelle eines beliebigen Strahles der gemeinsame Strahl tritt. Was die übrigen Fälle betrifft, so sind sie von dem allgemeinen fast gar nicht, und wenn, so nur unwesentlich verschieden.

Wir wollen in aller Kürze die wichtigsten von den Spezialfällen und zwar nur an einer Gebildeart der Behandlungsweise nach wenigstens skizziren.

1) Von zwei einzweideutigen Punktreihen T' und T'' Fig. 15 (Taf. III) sind drei Paare entsprechender Punkte aa_1, bb_1, cc_1, dann das Verzweigungselement v der eindeutigen und der ihm entsprechende Doppelpunkt v_{12} der zweideutigen Reihe gegeben; man soll die Reihen vervollständigen.

Nimmt man das Punktepaar cc_1 zu Scheiteln der einzweideutigen Hülfsbüschel in reducirter Lage, so erhält man für den Reductionskegelschnitt folgende Punkte: den Schnitt von ca_1 mit $c_1 a$, von cb_1 mit $c_1 b$, von cv_{12} mit $c_1 v$ und den Scheitel c des zweideutigen Büschels. Ueberdiess muss jedoch der Reductionskegelschnitt die Gerade $c_1 v$ in ihrem Schnitt mit $c v_{12}$ tangiren. Man hat also von diesem

Kegelschnitte vier Punkte und die Tangente in einem, wodurch er vollkommen bestimmt ist. Nun kann man unmittelbar die Vervollständigung nach einer der vorgetragenen Methoden durchführen. Dasselbe für Strahlenbüschel.

2) Von zwei einzweideutigen Strahlenbüscheln $t' t''$ Fig. 16 (Taf. III) ist ein Strahlenpaar $A A_1$, das Verzweigungsstrahlenpaar $V W$ und das Doppelstrahlenpaar $V_{12} W_{12}$ gegeben; man soll die Büschel vervollständigen.

Nimmt man das Strahlenpaar $A A_1$ zu Trägern der reducirten Hülfsreihen $a v w$, $a_1 v_{12} w_{12}$, so erhält man für den Reductionskegelschnitt R drei Tanganten. Nämlich die Verbindungslinie von v mit v_{12}, die Verbindungslinie von w mit w_{12} und den Träger A der zweideutigen Reihe; überdiess wird aber die Tangente $v v_{12}$ in v und $w w_{12}$ in w von dem Reductionskegelschnitt berührt werden müssen. Man hat sonach drei Tangenten und zwei Berührungspunkte, wodurch der Reductionskegelschnitt R vollkommen bestimmt ist.

Die weitere Vervollständigung kann keine Schwierigkeiten bereiten und soll desshalb übergangen werden.

Es versteht sich von selbst, dass die aufgezählten Spezialfälle nicht alles erschöpfen. Nach den vorgetragenen Prinzipien wird es jedoch nicht schwer sein, in jedem einzelnen Falle soviel Elemente des Reductionskegelschnittes zu finden, als zu seiner Bestimmung erforderlich sind, und die Vervollständigung vorzunehmen.

Die vorgetragenenen Methoden der Vervollständigung einzweideutiger Gebilde reichen nicht mehr für den Fall aus, als beide Gebilde denselben Träger besitzen. Um auch solche Gebilde vervollständigen und studiren zu können, übergehen wir jetzt zu einer eingehenden Betrachtung der

„Einzweideutigen Punkt- und Tangentensysteme an Kegelschnitten."

25. Sowie man projectivische, d. h. ein-eindeutige Elementensysteme an Kegelschnitten betrachtet, so kann man auch einzweideutige Punkt- und Tangentensysteme an Kegelschnitten untersuchen und vervollständigen.

„Unter zwei einzweideutigen Elementensystemen S' und S'' auf einem Kegelschnitte K verstehen wir zwei solche Elementensysteme, bei welchen jedem Elemente x des eindeutigen Systems S' zwei Elemente $x_1 x_2$ des zweideutigen Systems S'' entsprechen, aber umgekehrt jedem Elemente x_1 des zweideutigen Systems S'' nur ein einziges Element x des eindeutigen Systems S' entspricht."

Der Kegelschnitt K ist dann der Träger der beiden Systeme;

die Elemente eines Systemes sind entweder Punkte oder Tangenten, d. h. ein System ist entweder ein Punkt- oder ein Tangentensystem.

Aus der obigen Definition zweier einzweideutigen Systeme folgt unmittelbar: „dass die Elementenpaare des zweideutigen Systems, welche den einzelnen Elementen des eindeutigen Systems entsprechen, eine quadratische Elementeninvolution auf dem Träger K bilden."

Zu solchen einzweideutigen Punkt- und Tangentensystemen gelangt man am einfachsten auf folgendem Wege. Man denke sich erstens zwei Büschel t' und t'' in einzweideutiger Beziehung. Den Strahlen $A, B, C, D \dots$ des eindeutigen Büschels t' entsprechen die Strahlenpaare $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$, $D_1 D_2 \dots$ des zweideutigen Büschels t''. Nun lege man durch die beiden Scheitel t', t'' der Büschel einen willkührlichen Kegelschnitt K. Derselbe wird von dem eindeutigen Büschel $A, B, C, D \dots$ in einem Punktsysteme $a, b, c, d \dots$ und von dem zweideutigen Büschel $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$, $D_1 D_2 \dots$ in einem aus Punktepaaren bestehenden Punktsysteme $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, $c_1 c_2$, $d_1 d_2 \dots$ geschnitten.

Die beiden auf solche Art und Weise auf dem Kegelschnitte K entstandenen Punktsysteme sind zwei „einzweideutige Punktsysteme." Jeden Punkt des Kegelschnittes K (des Trägers) kann man ebensowohl zu dem eindeutigen Systeme, als auch zu dem zweideutigen Systeme rechnen; im ersten Fall entspricht ihm ein Punktepaar, im zweiten Falle ein einzelner Punkt.

Denkt man sich einen bestimmten Punkt des Kegelschnittes K und rechnet man ihn zum eindeutigen System, so mag er mit x bezeichnet werden. Um das ihm entsprechende Punktepaar im zweideutigen System zu finden, verbinde man ihn mit dem Scheitel t' des eindeutigen Büschels durch den Strahl X und suche das zu X entsprechende Strahlenpaar $X_1 X_2$ des zweideutigen Büschels t''. Dasselbe schneidet dann den Kegelschnitt K in dem gesuchten entsprechenden Punktepaar $x_1 x_2$.

Würde man denselben Punkt x zum zweideutigen System rechnen, so müsste man ihn mit einem Index — etwa mit y_1 bezeichnen. — Verbände man dann y_1 mit t'' durch den Strahl Y_1, so wird diesem Strahle des zweideutigen Büschels ein Strahl Y des eindeutigen entsprechen, welcher den Träger K in dem Punkte y, welcher dem y_1 entspricht, schneiden wird.

Ebenso leicht kann man sich zwei einzweideutige Tangentensysteme auf einem Kegelschnitte herstellen.

Sind nämlich T und T' die Träger zweier einzweideutigen Punktreihen, so mögen den Punkten $a, b, c, d \dots$ der eindeutigen Reihe

T' die Punktepaare $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, $c_1 c_2$, $d_1 d_2 \ldots$ der zweideutigen Reihe T'' entsprechen.

Legt man nun einen Kegelschnitt K so, dass er die beiden Träger T' und T'' berührt und zieht man von den Punkten der eindeutigen Reihe an ihn die Tangenten $A, B, C, D \ldots$ und von den Punktepaaren der zweideutigen Reihe die Tangentenpaare $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$, $D_1 D_2 \ldots$ so erhält man auf dem Kegelschnitte K zwei einzweideutige Tangentensysteme; und zwar ist $A, B, C, D \ldots$ das eindeutige und $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$, $D_1 D_2 \ldots$ das zweideutige Tangentensystem.

Jede Tangente des Trägers K kann ebensowohl zu dem eindeutigen, als auch zu dem zweideutigen Tangentensystem gerechnet werden. Im ersten Falle kann sie mit X bezeichnet werden und es wird ihr im zweideutigen Systeme ein Tangentenpaar entsprechen. Um dasselbe zu finden, suche man zunächst das dem Schnittpunkt x von X und T' auf T'' entsprechende Punktepaar x_1, x_2 von welchem aus an K das gesuchte Tangentenpaar X_1, X_2 gezogen werden kann.

Rechnet man dieselbe Tangente zum zweideutigen Systeme, so dürfte sie etwa mit Y_1 bezeichnet werden. Dieselbe schneidet den Träger T'' der zweideutigen Reihe in einem Punkte y_1, welchem auf der eindeutigen Reihe T' der einzige Punkt y entspricht. Von y geht nun an K eine Tangente Y, welche die der Y_1 entsprechende Tangente des eindeutigen Systems ist.

Dieselbe Art, wie wir einzweideutige Elementensysteme auf Kegelschnitten entstehen liessen, kann zu einer Methode ihrer Vervollständigung führen.

Hätten wir z. B. zwei einzweideutige $\left\{\begin{matrix}\text{Punkt}\\ \text{Tangenten}\end{matrix}\right\}$ systeme, so nehmen wir auf dem Kegelschnitte K, welcher der Träger der beiden Systeme ist, zwei sonst beliebige $\left\{\begin{matrix}\text{Punkte}\\ \text{Tangenten}\end{matrix}\right\}$ $\left\{\begin{matrix}t', t''\\ T', T''\end{matrix}\right\}$ zu Trägern zweier auf ihnen durch die Elemente der beiden Systeme bestimmten $\left\{\begin{matrix}\text{Strahlenbüschel}\\ \text{Punktreihen}\end{matrix}\right\}$ an, welche dann selbst in einzweideutiger Beziehung stehen.

Vervollständigt man nun diese beiden Hülfs $\left\{\begin{matrix}\text{büschel}\\ \text{reihen}\end{matrix}\right\}$, so werden dadurch auch die beiden einzweideutigen Elemententensysteme vervollständigt.

„Daraus geht jedoch unmittelbar der wichtige Satz hervor, dass zwei einzweideutige Elementensysteme auf einem Kegelschnitt ebenfalls durch fünf Paar entsprechender Elemente bestimmt sind.“

26. Wir wollen nun zur constructiven Vervollständigung solch

zweier Elementensysteme schreiten und zwar zuerst zwei einzweideutige Punktsysteme auf einem Kegelschnitt betrachten.

Sei zu dem Behufe K Fig. 17 (Taf. III) der Träger der beiden Punktsysteme; so werden dieselben nach Früherem durch fünf Paar entsprechender Punkte bestimmt sein. Die fünf Punkte des eindeutigen Systems seien a, b, c, d, e und die ihnen entsprechenden Punkte des zweideutigen Systems seien a_1, b_1, c_1, d_1, e_1.

Um nun diese zwei Punktsysteme vervollständigen zu können, bringen wir sie mit zwei Strahlenbüscheln, deren Scheitel auf K liegen, in Beziehung. Wir nehmen nämlich auf K zwei sonst willkührliche Punkte t' und t'' an und construiren über a, b, c, d, e aus t' das Strahlenbüschel A, B, C, D, E und über a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 aus t'' das Strahlenbüschel A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 [1]).

Diese zwei Strahlenbüschel t' und t'', welche mit den beiden Punktsystemen bezüglich K perspectivisch liegen, sind nun vermöge dieser ihrer Lage selbst in einzweideutiger Beziehung und können daher nach den vorgetragenen Methoden leicht vervollständigt werden. Ist dann X ein Strahl des eindeutigen Büschels, welchem im zweideutigen Büschel das Strahlenpaar X_1, X_2 entspricht, so schneiden die drei Strahlen X, X_1, X_2 den Träger K in drei Punkten x, x_1, x_2 so, dass dem Punkte x des eindeutigen Systems das Punktepaar x_1, x_2 des zweideutigen Systems entspricht. Wie man auf diese Art zu einem Punkte des eindeutigen Systems das entsprechende Punktepaar des zweideutigen und umgekehrt construiren könne, ist unmittelbar klar. Da die Scheitel t', t'' der beiden Hülfsbüschel willkührlich sind, so können wir sie gleich so annehmen, dass diese zwei Hülfsbüschel in reducirter Lage sich befinden.

Diess geschieht dann, wenn wir ein entsprechendes Punktepaar als Scheitel annehmen, so zwar, dass der Punkt des eindeutigen Systems zum Scheitel des zweideutigen Büschels und der ihm entsprechende Punkt des zweideutigen Systems zum Scheitel des eindeutigen Büschels wird.

Wir wollen also den Punkt e_1 etwa zum Scheitel des eindeutigen Büschels nehmen, wesshalb dieser Punkt auch den Buchstaben t' trägt; der ihm entsprechende Punkt e ist dann der mit t'' bezeichnete Scheitel des zweideutigen Büschels.

Die von e_1 nach a, b, c, d, e gezogenen fünf Strahlen sind mit A, B, C, D, E bezeichnet und gehören dem eindeutigen Büschel an; ihnen entsprechen im zweideutigen Büschel die Strahlen A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, welches die Verbindungslinien des Punktes e mit den Punkten a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 sind. — Da erkennt man jedoch sofort, dass diese Hülfs-

[1]) Diesen Theil der Figur möge sich der Leser selbst hinzufügen.

büschel sich in reducirter Lage befinden, weil im gemeinschaftlichen Strahle $\overline{ee}_1$ der Strahl E_1 mit seinem entsprechenden E vereinigt ist. Der Durchschnitt beider Büschel wird somit ein Kegelschnitt R sein, welchen wir abermals „den Reductionskegelschnitt der beiden einzweideutigen Punktsysteme bezüglich des Punktepaares ee_1“ nennen wollen.

Dieser Kegelschnitt wird uns bei der Vervollständigung der beiden Punktsysteme wesentliche Dienste leisten.

Wir besitzen von demselben fünf Punkte, nämlich den Scheitel e des zweideutigen Büschels und die Schnittpunkte der vier Strahlenpaare AA_1, BB_1, CC_1, DD_1; dadurch ist der Kegelschnitt R unzweideutig bestimmt.

Die Vervollständigung der beiden einzweideutigen Punktsysteme geschieht nun mittelst des Kegelschnittes R in folgender Weise:

1) Zu einem Punkte x_1 des zweideutigen Systems den entsprechenden Punkt x des eindeutigen Systems zu bestimmen.

Zieht man von e als dem Scheitel des zweideutigen Hülfsbüschels nach x_1 den Strahl X_1, so schneidet dieser den Kegelschnitt R noch in einem Punkte ξ_1, welcher leicht lineal construirt werden kann.

Wird nun dieser Schnittpunkt ξ_1 mit dem Scheitel e_1 des eindeutigen Büschels durch den (dem X_1 entsprechenden) Strahl X verbunden, so trifft dieser den Träger K in dem gesuchten Punkte x.

2) Zu einem Punkte x des eindeutigen Systems das entsprechende Punktepaar x_1, x_2 des zweideutigen Systems zu bestimmen.

Verbindet man den Punkt x mit dem Scheitel e_1 des eindeutigen Hülfsbüschels durch den Strahl X, so trifft dieser den Reductionskegelschnitt R in zwei (reellen oder imaginären) Punkten ξ_1, ξ_2, welche mit e verbunden, das Strahlenpaar X_1 X_2 liefern. Dieses Strahlenpaar trifft nun den Träger K in dem gesuchten Punktepaare x_1, x_2. Wie man sofort erkennt ist diese zweite Aufgabe quadratischer Natur und wird jedenfalls die Hülfe des Lineals und des Zirkels erfordern.

An die Construction 2 lässt sich nun folgende wichtige Betrachtung anknüpfen.

Durch die einzelnen Strahlen X des eindeutigen Büschels e_1 werden auf dem Reductionskegelschnitte Punktepaare ξ_1, ξ_2 einer quadratischen Involution bestimmt, während auf dem Träger K durch dasselbe Büschel das eindeutige Punktsystem x bestimmt wird. Die auf R entstehende Punktinvolution wird nun aus e — welcher Punkt auch dem K angehört — durch eine Strahleninvolution X_1 X_2 (die Strahlenpaare des zweideutigen Hülfsbüschels) auf den Kegelschnitt K projicirt, wodurch auf K selbstverständlich ebenfalls eine Punktinvolution x_1 x_2 entsteht. Diese Involution wird von den Punktepaaren des zweideutigen Systems gebildet. Diese Punktinvolution, resp. das zweideutige

Punktsystem besitzt nun zwei reelle oder imaginäre Doppelpunkte v_{12} und w_{12}, welche wir die „Doppelpunkte des zweideutigen Punktsystems“ nennen und welche zwei gewissen Punkten v und w — „den Verzweigungspunkten des eindeutigen Systems“ entsprechen.

Dieselben ergeben sich unmittelbbar. Von dem Scheitel e_1 gehen nämlich an den Reductionskegelschnitt R die beiden reellen oder imaginären Verzweigungsstrahlen V und W des eindeutigen Hülfsbüschels, welche den Träger K in den beiden Verzweigungspunkten v und w des eindeutigen Punktsystems schneiden. Die beiden Verzweigungsstrahlen V und W berühren den Reductionskegelschnitt R in den Doppelpunkten ν_{12} und ω_{12} der auf R entstehenden Punktinvolution. Zieht man nun von e aus nach ν_{12} und ω_{12} die beiden Strahlen V_{12} und W_{12}, so sind diess die beiden Doppelstrahlen des zweideutigen Hülfsbüschels, welche den Träger K in den Doppelpunkten v_{12}, w_{12} des zweideutigen Punktsystems schneiden.

Wenn jeder durch e_1 gehende Strahl X den Reductionskegelschnitt R in zwei reellen Punkten schneidet, so entspricht jedem Punkte x des eindeutigen Systems ein reelles Punktepaar x_1, x_2 des zweideutigen Punktsystems. In diesem Falle sagen wir von dem zweideutigen Punktsystem, es sei reell. Man erkennt auch augenblicklich, dass in diesem Falle von e_1 aus an R zwei imaginäre Tangenten gehen, wesshalb sowohl Verzweigungspunkte, als auch Doppelpunkte imaginär sind. Gehen jedoch von e_1 aus an R zwei reelle Tangenten, d. h. sind die Verzweigungs- und die Doppelpunkte reell, so werden nicht alle durch e_1 gehenden Strahlen von R in zwei reellen Punkten geschnitten. In diesem Falle existirt im eindeutigen System eine Partie von Punkten, welchen im zweideutigen Systeme imaginäre Punktepaare entsprechen. Wir sagen dann, das zweideutige Gebilde sei complex. Der Träger K wird durch die beiden Verzweigungspunkte v und w in zwei Theile getrennt; so zwar, dass jedem Punkte des einen Theiles ein reelles und jedem Punkte des anderen ein imaginäres Punktepaar entspricht.

Für den Fall schliesslich, wo beide Verzweigungspunkte, also auch die beiden Doppelpunkte zusammenfallen, lässt sich leicht einsehen, dass die beiden Punktsysteme aufhören einzweideutig zu sein, dass sie projectivisch werden. Es geht da nämlich der Reductionskegelschnitt gleichzeitig durch e und e_1 hindurch.

27. Wir wollen in diesem Artikel eine wichtige Frage, nämlich jene nach den „Doppelpunkten beider Systeme“ beantworten. Man kann fragen: Wie vielmal und wo fällt ein Punkt des eindeutigen Systems mit einem seiner beiden entsprechenden oder — was dasselbe

ist — wie vielmal fällt ein Punkt des zweideutigen Systems mit dem ihm entsprechenden Punkte zusammen?

Dies wird offenbar in den drei Schnittpunkten, welche der Träger K mit dem Reductionskegelschnitte ausser e liefert, eintreten.

Wir wollen diese drei Schnittpunkte als „die drei Doppelpunkte **beider** Systeme“ mit den Buchstaben d^1, d^2, d^3 bezeichnen. In der That geht der Strahl D des eindeutigen Hülfsbüschels e_1 durch den einen Schnittpunkt d^1 — welchen wir, ihn zum eindeutigen Systeme rechnend, mit d^1 bezeichnen — so schneidet er den Reductionskegelschnitt R in dem Punktepaar δ_1, δ_2, so dass δ_1 wieder mit d^1 zusammenfällt. Das aus e nach δ_1, δ_2 gehende Strahlenpaar des zweideutigen Hülfsbüschels ist D_1', D_2' und zwar geht D_1' durch δ_1 oder d^1. Demnach fällt der Punkt $d_1{}^1$ (d. i. der Schnitt von D_1 mit K) mit d^1 zusammen und es ist dieser Schnittpunkt wirklich ein Doppelpunkt. Der zweite dem Doppelpunkt entsprechende Punkt ist nun der Schnittpunkt $d_2{}^1$ von D_2 mit K. Dasselbe gilt von den beiden übrigen Schnittpunkten d^2, d^3 von K und R.

Es wäre wohl noch etwas betreffs der Bezeichnung der eben betrachteten Punkte zu bemerken.

Wenn wir den Schnittpunkt d^1 zum eindeutigen Systeme rechnen, so entspricht ihm einmal der mit ihm zusammenfallende Punkt, d. h. er entspricht sich einmal selbst. Er hätte deshalb auch $d_1{}^1$ zu heissen. Um jedoch einen doppelten Buchstaben zu vermeiden, wählten wir eben den Buchstaben d, um den Charakter des Doppelpunktes anzudeuten. Wir bezeichnen also den Doppelpunkt d^1 statt mit $(d_1\, d_1{}^1)$ kurz mit d^1, während wir den zweiten dem d^1 entsprechenden vollständig mit $d_2{}^1$ bezeichnen wollen. Ebenso schreiben wir d^2, d^3 resp. statt $(d^2\, d_1{}^2)$, $(d^3\, d_1{}^3)$.

„Zwei einzweideutige Punktsysteme auf einem Kegelschnitte besitzen demnach drei Doppelpunkte, nämlich die Schnittpunkte des Trägers mit dem Reductionskegelschnitte der beiden Punktsysteme bezüglich irgend eines Punktepaares.“

Da, sobald die beiden Punktsysteme gegeben sind, es auch die drei Doppelpunkte sind, so folgern wir, dass alle Reductionskegelschnitte der beiden Punktsysteme, wie sie den sämmtlichen Punktepaaren entsprechen, durch die nämlichen drei Punkte von K, nämlich durch die drei Doppelpunkte d^1, d^2, d^3 hindurchgehen müssen. Die Reduktionskegelschnitte zweier einzweideutigen Punktesysteme auf einem Kegelschnitte K bilden somit ein Kegelschnittnetz, dessen Scheitel die drei Doppelpunkte sind.

Um die drei Doppelpunkte zweier einzweideutigen Punktsysteme auf einem Kegelschnitte K zu finden, reicht die Hülfe des Cirkels und

Lineals allein nicht mehr aus. Man muss nämlich die drei Schnittpunkte des Trägers K mit dem Reductionskegelschnitte R finden, welche ausser dem bekannten vierten Schnittpunkte e beider Kegelschnitte existiren. Die Aufgabe ist bereits cubischer Natur, und wie wir später zu zeigen gedenken, die Grundaufgabe aller Aufgaben dritten Grades.

Um die drei Schnittpunkte d^1, d^2, d^3 zu bestimmen, bleibt nichts Anderes übrig, als die Contouren der Curven K und R zu zeichnen und ihre Durchschnittspunkte d^1, d^2, d^3 zu markiren.

So wichtig es für die constructive Geometrie ist, Aufgaben des dritten Grades mit derselben Präcision aufzulösen, wie jene des ersten oder zweiten Grades — so wichtig ist die Erfindung oder Einführung eines Instrumentes zur Beschreibung beliebiger Kegelschnitte — eines Kegelschnittscirkels. Die Wichtigkeit dieses Instruments wird dadurch noch bedeutend erhöht, weil sich zeigen lässt (wir werden später davon zu sprechen Gelegenheit haben), dass auch Aufgaben des vierten Grades im Allgemeinen ihre constructive Lösung durch dieses Instrument finden. Freilich sind Instrumente von solcher Art schon lange bekannt, und es bliebe nur zu untersuchen, ob und welche Veränderungen an ihnen nöthig wären, um sie zur constructiven Lösung der Aufgaben dritten und vierten Grades gebrauchen zu können. — Die Methode der Lösung solcher Aufgaben soviel als möglich systematisch zu entwickeln, wollen wir mit unseren schwachen Kräften in diesem und den folgenden, dem Gegenstande gewidmeten Aufsätzen versuchen.

28. Bei der Vervollständigung zweier einzweideutigen Punktsysteme auf dem Kegelschnitte K als Träger Fig. 17 (Taf. III) kam es nur darauf an, die zwei einzweideutigen, überdiess in reducirter Lage befindlichen Hülfsbüschel an den Punkten e und e_1 zu vervollständigen, da entsprechende Strahlen dieser beiden Büschel den Träger K in entsprechenden Punkten der beiden Systeme schneiden.

Man kann desshalb auf diese zwei Hülfsbüschel die in Art. 19 vorgetragene Methode mit dem Constructionskreise anwenden, und so den Kegelschnitt R und die jedesmalige Lösung einer besonderen Aufgabe des zweiten Grades umgehen. Man wird nämlich bei Verwendung dieser Methode nicht nöthig haben, die Schnittpunkte ξ_1, ξ_2 des Strahles X mit dem Reductionskegelschnitt zu suchen, um zum entsprechenden Strahlenpaar X_1, X_2 zu gelangen. (Vergleiche in dieser Sache den Art. 19). Im Falle, dass der Contour des Trägers K gezeichnet vorliegt (was wir immer voraussetzen können, da der Kegelschnitt K in den Fällen, wo wir diese Methode verwenden werden, ein Kreis sein wird), lässt sich noch eine schnellere und mehr directe Methode

der Vervollständigung der beiden einzweideutigen Punktsysteme angeben. Wir wollen dieselbe in diesem Artikel weiter entwickeln.

Wie schon früher mehrmals erwähnt wurde, und wie auch aus dem Constructionsgange deutlich hervorgeht, bilden die Punktepaare des zweideutigen Systems, wie sie den einzelnen Punkten des eindeutigen Systems entsprechen, eine Punktinvolution zweiten Grades auf dem Träger K. Folglich gehen die geraden Verbindungslinien dieser Punktepaare durch einen festen Punkt — das Centrum dieser Involution. Seien $a, b, c, d \dots$ Punkte des eindeutigen Systems und $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, $c_1 c_2$, $d_1 d_2, \dots$ die ihnen der Reihe nach entsprechenden Punktepaare des zweideutigen Systems; dann gehen also die Geraden $\overline{a_1 a_2}$, $\overline{b_1 b_2}$, $\overline{c_1 c_2}$ $\overline{d_1 d_2}, \dots$, welche wir der Reihe nach mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \dots$ bezeichnen wollen, durch einen und denselben festen Punkt p, ein Strahlenbüschel bildend. Es folgt aber unmittelbar, dass jetzt das eindeutige Punktsystem $a, b, c, d \dots$ mit diesem Strahlenbüschel $\alpha, \beta, \gamma, \delta \dots$ projectivisch ist. Denn jedem Punkte des ersteren entspricht ein einziger Strahl des letzteren und umgekehrt. Dem a entspricht α, dem $b - \beta$, dem $c - \gamma$ u. s. w. Man kann desshalb in einfachster Weise diese beiden projectivischen Gebilde vervollständigen, etwa dadurch, dass man über dem Punktsystem $a, b, c, d \dots$ aus einem Punkte t', welcher beliebig auf K genommen wird, ein Strahlenbüschel α', β', γ', $\delta' \dots$ construirt, welches dann mit dem Büschel an p ebenfalls projectivisch ist.

Soll nun zu einem Punkte x des eindeutigen Systems das entsprechende Punktepaar x_1, x_2 des zweideutigen Systems construirt werden, so ziehe man von x nach t' den Strahl ξ', construire zu ihm den projectivisch entsprechenden Strahl ξ im Büschel p. Dieser letztere trifft dann den Träger K in dem gesuchten Punktepaare x_1, x_2.

Aus dem ganzen Vorgange geht hervor, dass die Berührungspunkte v_{12} und w_{12} der von p an K gezogenen Tangenten v und ω die beiden „Doppelpunkte des zweideutigen Systems" sind, welchen dann die leicht bestimmbaren Verzweigungspunkte v und w im eindeutigen System entsprechen.

Auch die „drei Doppelpunkte beider Systeme" nämlich die drei Punkte d^1, d^2, d^3 kann man leicht finden.[1])

Die beiden projectivischen Büschel p $(\alpha \beta \gamma \dots)$ und t' $(\alpha' \beta' \gamma' \dots)$ durchschneiden sich in einem Kegelschnitte Σ, welcher durch die beiden Scheitel p und t' hindurchgeht. Derselbe trifft desshalb den Träger

[1]) Wir machen hier wiederholt auf den Unterschied zwischen den „Doppelpunkten des zweideutigen Systems" und den „Doppelpunkten beider Systeme" aufmerksam; siehe Art. 27.

K noch in drei weiteren Punkten, welche offenbar die drei Doppelpunkte d^1, d^2, d^3 sein werden.

Daraus ergibt sich nebenbei, dass, wenn man den beliebig gewählten Scheitel t' des Büschels $\alpha' \beta' \gamma' \ldots$ nach und nach alle Lagen auf dem Träger K annehmen lässt, der entsprechende Kegelschnitt Σ ein Büschel beschreibt, dessen Scheitel die Punkte p, d^1, d^2, d^3 sind.

Frage: Wo müsste man den Scheitel t' annehmen, damit die beiden Büschel $\alpha \beta \gamma \ldots$ und $\alpha' \beta' \gamma' \ldots$ perspectivisch werden?

Wir wollen die vorgetragene Methode nun wirklich zur Vervollständigung zweier einzweideutigen Punktsysteme auf einem Kegelschnitte verwenden.

Sei zu dem Ende K Fig. 18 (Taf. III) der Träger der beiden einzweideutigen Punktsysteme und $aa_1, bb_1, cc_1, dd_1, ee_1$ die fünf gegebenen Paare entsprechender Punkte. Es wird nun darauf ankommen, das Centrum p der Involution auf K zu bestimmen. Zu dem Behufe werden wir zwei Punktepaare des zweideutigen Systems: etwa $a_1\, a_2$ und $b_1\, b_2$ vervollständigen, d. h. die beiden Punkte a_2 und b_2 construiren.

Nimmt man wieder für den Augenblick e zum Scheitel des über a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 construirten zweideutigen Büschels A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 und ebenso e_1 zum Scheitel des über a, b, c, d, e construirten eindeutigen Büschels A, B, C, D, E (welche Büschel in reducirter Lage sind), so erhält man für den Reductionskegelschnitt R fünf Punkte, nämlich: den Scheitel e des zweideutigen Büschels, und die Schnittpunkte 1, 5, 2, 4 der vier Strahlenpaare AA_1, BB_1, CC_1, DD_1; den Scheitel e des zweideutigen Büschels wollen wir mit der Ziffer 3 bezeichnen. Um den Punkt a_2 zu finden, haben wir zunächst den zweiten Schnittpunkt des Strahles A mit dem Reductionskegelschnitte R zu bestimmen. Bezeichnet man diesen mit der Ziffer 6 und wendet man auf das Sechseck 1 2 3 4 5 6 den Satz von Pascal an, so ergibt sich folgende Construction dieses Schnittpunktes. Man ziehe die Linie $\overline{(12)(45), (34)(61)}$ [wobei (61) der Strahl A ist] und verbinde ihren Schnittpunkt auf (23) mit dem Punkte 5. Die letztgezogene Verbindungslinie schneidet den Strahl A in dem gesuchten zweiten Schnittpunkte, welcher mit e verbunden den Strahl A_2 liefert. Dieser Strahl A_2 trifft nun den Träger K in dem Punkte a_2. Ebenso findet man b_2, indem man zunächst den zweiten Schnittpunkt von B und R sucht. Da bezeichnen wir diesen Schnittpunkt mit 6 und wenden auf das neue Sechseck abermals den Pascal'schen Satz an, wodurch wir folgende Construction erhalten: Ziehe die Verbindungslinie von (12) (45) und (23) (56), d. h. die Linie $\overline{(12)(45), (23)(56)}$ und schneide sie mit der Geraden (34); den Schnittpunkt verbinde mit 1, so wird durch diese Verbindungslinie der Strahl B in dem gesuchten zweiten Schnittpunkte mit R

geschnitten. Wird nun dieser Schnittpunkt mit e yerbunden, so gibt diess den Strahl B_2, welcher K in b_2 trifft.

Nun ziehe man die zwei Linien $\overline{a_1 a_2}$ ($= \alpha$) und $\overline{b_1 b_2}$ ($= \beta$), welche sich im Punkte p schneiden. Durch diesen Punkt müssen nun die Verbindungslinien sämmtlicher Punktepaare des zweideutigen Systems hindurchgehen.

Man kann jetzt leicht auch die Punkte c_2, d_2 und e_2 construiren. Zieht man nämlich von p aus nach c_1, d_1, e_1 resp. die Strahlen γ, δ, ε, so treffen diese den Träger K zum zweitenmale in den Punkten c_2, d_2 und e_2.

Das Strahlenbüschel $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ ist nun projectivisch mit dem eindeutigen Punktsysteme $a, b, c, \ldots$ folglich auch mit dem aus einem beliebigen Punkte t' von K über $a, b, c \ldots$ construirten Strahlenbüschel $\alpha', \beta', \gamma' \ldots$ Zieht man die Linien $\overline{(\alpha\beta')(\alpha'\beta)}$, $\overline{(\alpha\gamma')(\alpha'\gamma)}$ und $\overline{(\beta\gamma')(\beta'\gamma)}$, so erhält man in ihrem gemeinschaftlichen Schnittpunkte Δ das Directionscentrum der beiden projectivischen Büschel p und t'. Nun hat man folgende zwei Grundaufgaben zu lösen:

1) Zu einem Punkte x_1 des zweideutigen Systems den entsprechenden Punkt x des eindeutigen Systems zu construiren.

Man ziehe von p nach x_1 den Strahl ξ und suche zu ihm den im Büschel t' projectivisch entsprechenden Strahl ξ'. Man findet diesen Strahl, wenn man den Schnitt von ξ mit z. B. α' mit Δ verbindet bis α geschnitten wird und nach dem letzten Schnittpunkte von t' aus den Strahl ξ' zieht. Der Strahl ξ' trifft den Kegelschnitt K in dem gesuchten Punkte x.

2) Zu einem Punkte x des eindeutigen Systems das entsprechende Punktepaar x_1, x_2 des zweideutigen Systemes zu finden.

Man ziehe nach x den Strahl ξ' des Hülfsbüschels t', und construire nach der bekannten in 1) verwendeten Weise den projectivisch entsprechenden Strahl ξ, welcher den Träger K in dem gesuchten Punktepaare x_1, x_2 schneidet.

Wenn man von dem Punkte p aus an den Träger K die beiden Tangenten ν und ω zieht, so berühren diese den Träger in den beiden Doppelpunkten v_{12} und w_{12} des zweideutigen Systems. Die den zwei Strahlen ν und ω im Büschel t' entsprechenden Strahlen ν' und ω' treffen dann den Träger K in den zwei Verzweigungspunkten v, w des eindeutigen Punktsystems.

Was schliesslich die drei Doppelpunkte d^1, d^2, d^3 der beiden Systeme anbelangt, so findet man sie als die drei übrigen Schnittpunkte des Trägers K mit dem durch die zwei projectivischen Büchel $p(\alpha\beta\gamma\ldots)$, $t'(\alpha'\beta'\gamma'\ldots)$ erzeugten Kegelschnitte Σ.

29. Ganz analog der Vervollständigung zweier einzweideutigen Punktsysteme auf einem Kegelschnitte ist die Vervollständigung zweier

einzweideutigen Tangentensysteme. Es ist diess nichts weiter, als der reciproke Vorgang. Wir wollen uns daher bei der Entwickelung dieses Gegenstandes nicht länger aufhalten, und uns bloss mit der Construction selbst begnügen.

Ist Fig. 19 (Taf. III) K der Träger der beiden Tangentensysteme, A, B, C, D, E fünf Tangenten des eindeutigen Tangentensystems, und A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 die ihnen der Reihe nach entsprechenden Tangenten des zweideutigen Systems, so nehme man E und E_1 zu Trägern zweier Hülfsreihen, indem man das eindeutige System durch E_1 in der Punktreihe a, b, c, d, e und das zweideutige System durch die Tangente E in der Punktreihe a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 schneidet. Die beiden Punktreihen sind in reducirter Lage, weil das Punktepaar ee_1 in dem Schnitte der beiden Träger E und E_1 zusammenfällt. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte umhüllen somit einen Kegelschnitt — den Reductionskegelschnitt R der beiden Hülfsreihen. Von diesem Reductionskegelschnitt R haben wir fünf Tangenten, nämlich den Träger E der zweideutigen Reihe und die Verbindungslinien der vier Punktepaare aa_1, bb_1, cc_1, dd_1.

Soll nun 1) zu einer Tangente X_1 des zweideutigen Systems die entsprechende Tangente X des eindeutigen Systems gefunden werden, so ziehe man von dem Schnittpunkte x_1 der Tangente X_1 mit dem Träger E die zweite an den Reductionskegelschnitt R gehende Tangente ξ_1, welche E_1 in x schneidet. Von x geht nun an den Träger K die gesuchte Tangente X. Die ganze Construction ist linearer Natur.

2) Um zu einer Tangente X des eindeutigen Systems das entsprechende Tangentenpaar X_1, X_2 des zweideutigen Systems zu bestimmen, ziehe man von dem Schnittpunkte x von X mit E_1 an R das Tangentenpaar ξ_1, ξ_2, welches den Träger E in dem Punktepaare x_1, x_2 schneidet. Von x_1, x_2 geht nun an den Träger K das gesuchte Tangentenpaar $X_1\ X_2$. Die Aufgabe ist quadratisch.

Wie schon bekannt und wie auch aus der Constructionsart hervorgeht, bilden die Tangentenpaare X_1, X_2 eine quadratische Tangenteninvolution auf dem Träger K; dieselbe besitzt zwei reelle oder imaginäre Doppeltangenten, welches die „Doppeltangenten V_{12}, W_{12} des zweideutigen Systems" sind und denen die Verzweigungstangenten V, W im eindeutigen System entsprechen.

Wir finden die beiden Doppeltangenten in folgender Weise.

Der Träger E_1 der eindeutigen Hülfsreihe trifft den Reductionskegelschnitt R in den beiden reellen oder imaginären Verzweigungspunkten v und w der eindeutigen Hülfsreihe, von denen aus an den Träger K die beiden Verzweigungstangenten V und W des eindeutigen Systems gezogen werden können. Die Tangenten v_{12}, ω_{12} des

Reductionskegelschnitts R in dem Punktepaare v und w sind das Doppeltangentenpaar der auf R entstehenden Tangenteninvolution, welches den Träger E in dem Punktepaare v_{12}, w_{12} trifft. Von v_{12}, w_{12} gehen nun an K die beiden gesuchten Doppeltangenten V_{12}, W_{12} des zweideutigen Systems.

Sind die beiden Doppeltangenten, also auch die Verzweigungstangenten imaginär, so entspricht jeder Tangente des eindeutigen Systemes ein reelles Tangentenpaar des zweideutigen Systems. Wir sagen dann, das zweideutige Tangentensystem sei reell.

Sind dagegen die Doppel- und Verzweigungstangenten reell, so wird durch letztere der Träger K in zwei solche Theile zerlegt, dass jeder Tangente des einen ein reelles und jeder Tangente des anderen ein imaginäres Tangentenpaar im zweideutigen Systeme entspricht. Dann sagen wir, dass das zweideutige System complex sei.

Fallen die beiden Doppeltangenten und demgemäss auch die beiden Verzweigungstangenten zusammen, so überzeugt man sich leicht, dass die beiden Systeme nicht mehr einzweideutig, sondern eineindeutig, d. h. projectivisch sind.

30. Sowie bei einzweideutigen Punktsystemen auf einem Kegelschnitte, so fällt auch bei solchen Tangentensystemen dreimal eine Tangente mit einer ihr entsprechenden zusammen.

Das heisst, zwei einzweideutige Tangentensysteme auf einem Kegelschnitte besitzen drei Doppeltangenten, welche wir „die Doppeltangenten beider Systeme" nennen und mit D^1, D^2, D^3 bezeichnen wollen. Warum wir dieselben in dieser Art bezeichnen und wie diess zu verstehen sei, wird aus Art. 27 klar sein.

Der Träger K hat mit dem Reductionskegelschnitte R die Tangente E (als Träger der zweideutigen Hülfsreihe) gemein. Diese Curven K und R besitzen demnach noch weitere drei gemeinschaftliche Tangenten, welche eben die drei Doppeltangenten D^1, D^2, D^3 sind. Wir haben daher den Satz:

„Zwei einzweideutige Tangentensysteme auf einem Kegelschnitt besitzen drei Doppeltangenten, nämlich die drei weiteren dem Träger und dem Reductionskegelschnitt beider bezüglich irgend eines Tangentenpaares gemeinschaftlichen Tangenten."

Daraus geht nebenbei hervor, dass die sämmtlichen den einzelnen Paaren entsprechender Tangenten entsprechenden Reductionskegelschnitte sämmtlich drei feste Gerade — die drei Doppeltangenten beider Systeme berühren.

31. Die wirklich constructive Vervollständigung zweier einzweideutigen Tangentensysteme für den Fall, dass der Contour des Trägers gezeichnet vorliegt, kann wieder mit Verwendung der durch das zwei-

deutige System gegebenen quadratischen Tangenteninvolution in rascher Weise executirt werden.

Ist Fig. 20 (Taf. III) K der gezeichnet vorliegende Träger der beiden Tangentensysteme (den wir immer als Kreis voraussetzen können) und AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, EE_1 fünf Paare entsprechender Tangenten, so wird es, um die Involution des zweideutigen Systems zu bestimmen, nöthig sein, zu zwei Elementen des zweideutigen Systems, z. B. zu A_1 und B_1 die noch paarig zugeordneten Elemente A_2, B_2 zu bestimmen.

Man nehme E_1 zum Träger der durch das eindeutige System auf dieser Tangente bestimmten eindeutigen Punktreihe a, b, c, d, e und ebenso E zum Träger der durch das zweideutige System bestimmten zweideutigen und zwar mit ersterer reducirt liegenden Punktreihe a_1, b_1, c_1, d_1, e_1.

Von dem Reductionskegelschnitte der beiden Punktreihen besitzt man die fünf Tangenten aa_1, bb_1, cc_1, dd_1 und E, welche wir der Reihe nach mit den Ziffern 1, 5, 4, 2, 3 bezeichnen wollen. Von dem Punkte a geht nun an den Reductionskegelschnitt R ausser der Tangente aa_1 noch eine fernere Tangente, welche E im Punkte a_2 schneidet und die wir mit 6 bezeichnen wollen. Wendet man auf das Sechsseit (1 2 3 4 5 6) den Satz von Brianchon an, so ergibt sich folgende Construction für die sechste Tangente. Man bestimme den Schnitt von $\overline{(12)\,(45)}$ mit $\overline{(34)\,(61)}$ wobei (61) der Punkt a ist. Diesen Schnittpunkt verbinde man nun mit (23) und den Schnitt der letzteren Linie mit 5 verbinde man mit a, um die gesuchte Tangente vor sich zu haben. Diese schneidet nun E im Punkte a_2, von welchem aus an K die Tangente A_2 gezogen werden muss.

Ebenso findet man die zweite von b aus an R gehende Tangente, wenn man nämlich diese mit 6 bezeichnend auf das neue Sechsseit (1 2 3 4 5 6) ebenfalls den Brianchon'schen Satz anwendet. Man verbindet da den Schnitt von $\overline{(12)\,(45)}$ und $\overline{(23)\,(56)}$ [(56) ist der Punkt b] mit (34) und den dadurch auf 1 erhaltenen Punkt mit b. Diese sechste Tangente schneidet E in b_2, von wo aus an den Träger K die Tangente B_2 gezogen wird.

Nachdem man nun auf diese Art zwei Tangentenpaare $A_1\,A_2$, $B_1\,B_2$ des zweideutigen Systems resp. der Tangenteninvolution besitzt, kann man die Involutionsaxe P leicht erhalten. Diese Axe ist die Verbindungslinie des Schnittes α von A_1 und A_2 mit dem Schnitte β von B_1 und B_2.

Will man auch die Tangenten C_2, D_2, E_2 besitzen, so hat man nur von den Punkten γ, δ, ε, in denen P resp. von C, D, E geschnitten wird, an K die Tangenten zu ziehen.

Die auf P entstandene Punktreihe $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ ist nun projectivisch

mit dem eindeutigen Tangentensysteme $A, B, C, D \dots$ Nimmt man eine willkührliche Tangente T und K an und schneidet dieselbe durch die Tangenten $A, B, C, D \dots$ in den Punkten $\alpha', \beta', \gamma', \delta' \dots$ so erhält man eine Punktreihe, welche mit der Punktreihe auf P projectivisch ist. Sei Δ die Directionsaxe der beiden Reihen, d. i. die Verbindungslinie der Punkte $(\alpha\beta')$ $(\alpha'\beta)$, $(\beta\gamma')$ $(\beta'\gamma)$ u. s. w. Soll nun 1) zu einer Tangente X_1 des zweideutigen Systems die entsprechende Tangente X des eindeutigen gefunden werden, so bestimme man nach bekannter Art und Weise zu dem Schnitte ξ von X_1 mit P den projectivisch entsprechenden Punkt ξ' auf T und ziehe von ξ' an K die Tangente, welche die gesuchte Tangente X ist.

2) Zu einer Tangente X des eindeutigen Systems das entsprechende Tangentenpaar X_1 X_2 des zweideutigen Systems zu finden.

Man bestimme zu dem Schnitte ξ' von X und T den projectivisch entsprechenden Punkt ξ auf P und ziehe von ihm aus an K das gesuchte Tangentenpaar X_1 X_2.

Wir brauchen wohl nicht näher zu beweisen, dass die Tangenten V_{12} und W_{12} des Trägers K in den Schnittpunkten v und ω mit P die Doppeltangenten des zweideutigen Systems sind, denen dann die Verzweigungstangenten V und W im eindeutigen System entsprechen.

Die Punktreihe $\alpha, \beta, \gamma \dots$ auf P erzeugt mit der Punktreihe $\alpha', \beta', \gamma' \dots$ auf T einen Kegelschnitt Σ als Enveloppe, welcher mit K ausser der Tangente T noch drei weitere Tangenten gemeinschaftlich hat. Diess sind dann die drei Doppeltangenten D^1, D^2, D^3 der beiden Systeme.

32. Nachdem wir die Existenz von drei Doppelelementen zweier einzweideutigen Punkt- oder Tangentensystemen auf einem Kegelschnitte erkannt haben, und auch wissen, wie sie im Allgemeinen zu construiren sind (nämlich als drei von vier gemeinschaftlichen Elementen zweier Kegelschnitte, von denen man das vierte kennt), wird es nöthig sein, ihre Natur und Lage näher zu studiren.

Wir werden die Untersuchung eingehend für Punktsysteme führen und dann nach dem Gesetze der Dualität die Resultate auf Tangentensysteme übertragen.

Sei Fig. 21 (Taf. III) K der Träger zweier einzweideutigen Punktsysteme und ee_1 ein Paar entsprechender Punkte und zwar jenes, das zu Scheiteln der beiden Hülfsbüschel genommen wurde (vergleiche Art. 26). Die beiden Hülfsbüschel sind in reducirter Lage und geben als Durchschnitt einen Kegelschnitt R, welcher den Scheitel e des zweideutigen Büschels enthält. Die drei weiteren Schnittpunkte von R und K sind dann die drei Doppelpunkte d^1, d^2, d^3 der beiden Punktsysteme. Die von e_1 an R gehenden zwei Tangenten treffen den Träger K in dem Punktepaar v und w, welches die Verzweigungs-

punkte des eindeutigen Systems sind. Die von e nach den Berührungspunkten der Tangenten gehenden Strahlen schneiden K in dem Doppelpunktepaar v_{12}, w_{12}. Was nun die drei Doppelpunkte d^1, d^2, d^3 anbelangt, so erkennt man, weil der Schnittpunkt e von K mit R immer reell bleibt, unmittelbar, dass von denselben einer reell sein müsse. Die beiden übrigen können ebensowohl reell, als imaginär sein.

„Zwei einzweideutige Punktsysteme auf einem Kegelschnitte besitzen wenigstens einen reellen Doppelpunkt.“

Wenn aber zwei Doppelpunkte reell sind, so muss, wie auch aus der Figur hervorgeht, auch der dritte reell sein.

„Von den drei Doppelpunkten zweier einzweideutigen Punktsysteme auf einem Kegelschnitte ist entweder ein einziger oder aber alle drei reell.“

Man übersieht leicht, dass alle drei dann reell sind, wenn R mit K vier reelle Schnittpunkte liefert, und dass dann nur einer reell ist, wenn K mit R nur zwei reelle Schnittpunkte besitzt.

Es kann möglicherweise auch vorkommen, dass man von den drei Doppelpunkten einen, z. B. d^1 kennt und die beiden anderen bestimmt haben will. Die dabei zu lösende Aufgabe ist quadratisch und lautet folgendermassen: „Von zwei bestimmten Kegelschnitten (K und R) sind zwei Schnittpunkte gegeben (e und d^1), man soll die beiden übrigen Schnittpunkte (d^2 und d^3) construiren.“

Die Methode der Auflösung ist eine bekannte Sache; doch sind wir des Folgenden halber gezwungen, die Auflösung hier zu geben. Wir wollen diess in Form einer Aufgabe thun, wie sie uns dann später, namentlich bei der Theorie der Curven öfters aufstossen wird.

Aufgabe: Von zwei einzweideutigen Punktsystemen auf dem Kegelschnitte (Kreise) K Fig. 22 (Taf. III) sind die vier Punktepaare bb_1 cc_1 dd_1 ee_1 und ein Doppelpunkt d^1 beider Systeme gegeben; man soll die beiden Systeme vervollständigen und insbesondere die beiden weiteren Doppelpunkte d^2, d^3 construiren.

Nimmt man das Punktepaar ee_1 zu Scheiteln der beiden Hülfsbüschel, so erhält man von dem Reductionskegelschnitt R fünf Punkte; nämlich den Schnitt von eb_1 mit $e_1 b$, von ec_1 mit $e_1 c$, von ed_1 mit $e_1 d$, den Punkt e und den Doppelpunkt d^1. Dadurch ist R vollkommen bestimmt und man kann nach Art. 26 ohne Weiteres die Vervollständigung vornehmen.

Was die beiden fehlenden Doppelpunkte d^2, d^3 anbelangt, so ergeben sich dieselben durch folgende Construction.

Von den vier Schnittpunkten e, d^1, d^2, d^3 der beiden Kegelschnitte K und R kennen wir die zwei ersten. Nehmen wir nun diese zu Scheiteln zweier Büschel, deren entsprechende Strahlen sich auf R schneiden, so werden die beiden Büschel projectivisch sein, und auf K

zwei projectivische Punktsysteme bestimmen, deren Doppelpunkte offenbar die beiden gesuchten Punkte d^2 und d^3 sind. Bezeichnet man den Schnitt von $e_1 b$ mit eb_1 durch 1, jenen von $e_1 c$ mit ec_1 durch 2 und schliesslich den von $e_1 d$ und ed_1 durch 3, so sind diess drei Punkte von R. Die drei Strahlenpaare $d^1 1$, $e1$; $d^1 2$, $e2$; $d^1 3$, $e3$ schneiden K in den drei resp. Punktepaaren $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$, $\gamma\gamma_1$ der schon erwähnten zwei projectivischen Systeme. (Man sieht aus der Figur, dass die drei Punkte α_1, β_1, γ_1 identisch sind mit den drei Punkten b_1, c_1, d_1). Zieht man nun die Linie σ, welche den Schnitt von $\overline{\alpha\beta_1}$ und $\overline{\alpha_1\beta}$ mit jenem von $\overline{\beta\gamma_1}$ und $\overline{\beta_1\gamma}$ verbindet, so enthält sie bekanntlich auch den Schnitt von $\gamma\alpha_1$ und $\gamma_1\alpha$ und trifft den Träger K überdiess in den beiden verlangten Doppelpunkten d^2 und d^3. Dieselben sind reell, sobald σ von K in reellen Punkten geschnitten wird und im Gegenfalle imaginär.

Unsere Aufgabe wäre hiermit gelöst.

Es können aber auch zweie von den Doppelpunkten, z. B. d^1 und d^2 gegeben sein und man kann nach dem dritten fragen. Diess gibt Veranlassung zu der folgenden Aufgabe.

Aufgabe: „Von zwei einzweideutigen Punktsystemen auf dem Kegelschnitte K sind drei Paar entsprechender Punkte cc_1, dd_1, ee_1 (dieselbe Figur 22, Taf. III) und zwei von den Doppelpunkten nämlich d^1 und d^2 gegeben; man soll die beiden Systeme vervollständigen und den dritten Doppelpunkt d^3 bestimmen.“

Die Vervollständigung wird auch hier keine Schwierigkeiten haben, weil wir (bei derselben Anordnung, wie in der vorigen Aufgabe) von dem Reductionskegelschnitte R abermals fünf Punkte besitzen; nämlich die Punkte 2, 3, e, d^1 und d^2. Ebenso leicht und zwar lineal ist der zweite Theil der Aufgabe: den dritten Doppelpunkt d^3 zu construiren. Man wird sich die Punkte $\beta\beta_1$, $\gamma\gamma_1$ bestimmen und dann d_2 mit dem Schnitte von $\beta\gamma_1$ und $\beta_1\gamma$ durch σ verbinden, welche Linie K in dem gesuchten Doppelpunkte d^3 trifft.

Wären von den beiden einzweideutigen Punktsystemen die sämmtlichen drei Doppelpunkte d^1, d^2, d^3 und überdiess die zwei Punktepaare dd_1, ee_1 gegeben, so sieht man, dass die Vervollständigung in derselben Weise zu geschehen hat, wie in den früheren Fällen. Man besitzt nämlich von dem Kegelschnitte R die fünf Punkte 3, e, d^1, d^2, d^3, was vollständig genügt.

Zur Uebung möge der geneigte Leser die Vervollständigung für jene Fälle durchführen, wo neben gewöhnlichen Elementenpaaren und Doppelelementen beider Systeme auch Doppelelemente des zweideutigen Systems und dem entsprechend auch Verzweigungselemente vorkommen. In allen solchen Fällen wird man sich bei Fig. 21 (Taf. III) Rath holen können, weil dieselbe in anschaulicher Weise den Zusammenhang

der singulären Elemente mit einander, mit dem Träger und mit dem Reductionskegelschnitt verdeutlicht.

Ebenso instructiv sind die Fälle, bei welchen unter den Daten auch complete Elementenpaare des zweideutigen Systems auftreten.

In dieser Hinsicht erlaube man uns eine Bemerkung an die Figur 21 (Taf. III) zu knüpfen. Sie betrifft die Frage: Wo ist der dem e zweitentsprechende Punkt e_2 des zweideutigen Systems? Nun da lässt sich aus dem ganzen Zusammenhange klar überblicken, dass es jener Punkt ist, in welchem die in e an R gezogene Tangente den Träger K schneidet.

33. Dasselbe, was in Art. 32 von Punktsystemen gesagt wurde, gilt in reciproker Gestalt von Tangentensystemen und mag desshalb hier nur kurz skizzirt werden. Wenn Fig. 23 (Taf. III) K der Träger und EE_1 jenes Tangentenpaar ist, welches zu Trägern der beiden reducirten Hülfsreihen genommen wurde, so erzeugen die Hülfsreihen als Enveloppe einen Kegelschnitt R, welcher den Träger E der zweideutigen Hülfsreihe berührt. K und R haben daher noch drei weitere gemeinschaftliche Tangenten D^1, D^2, D^3, welches die drei Doppeltangenten der beiden Systeme sind. E_1 schneidet R in einem Punktepaare, von welchem aus an K das Paar V und W der Verzweigungstangenten gelegt werden kann. Die Tangenten des erwähnten Punktepaares auf E_1 treffen E in zwei Punkten, von welchen an K die beiden Doppeltangenten V_{12}, W_{12} des zweideutigen Systems gehen. Auch hier erkennt man die Wahrheit des Satzes:

„Von den drei Doppeltangenten zweier einzweideutigen Tangentensysteme auf einem Kegelschnitte ist entweder eine reell oder aber es sind alle drei reell."

Wenn von den drei Doppeltangenten eine bekannt ist und man die zwei übrigen construiren soll, so hat man abermals eine Aufgabe des zweiten Grades, wie die erste Aufgabe des Art. 32 zu lösen. Die beiden Doppeltangenten ergeben sich als die zwei Doppeltangenten zweier projectivischen Tangentensysteme auf K. Ebenso leicht und zwar lineal ist die Aufgabe zu lösen, die dritte Doppeltangente zu construiren, wenn zweie gegeben sind.

Wie man in diesen beiden Fällen und auch in jenem, wo alle Doppeltangenten bekannt sind, die Systeme vervollständigt, dürfte zu erwähnen nicht nöthig sein. Man erhält in jedem Falle von dem Reductionskegelschnitte R fünf Tangenten und kann nach Art. 29 die Vervollständigung vornehmen.

Die den einzelnen in Art. 32 durchgeführten oder angeführten Aufgaben reciproken Aufgaben wirklich constructiv aufzulösen, überlassen wir dem Leser, überzeugt, dass derselbe auf keine Schwierigkeiten stossen werde.

34. Von besonderer Wichtigkeit sind solche einzweideutige Punktsysteme eines Kegelschnitts, von deren Doppelpunkten etliche zusammenfallen.

Zwei solche Punktsysteme besitzen, wie wir gesehen haben, drei Doppelpunkte d^1, d^2, d^3, von denen möglicherweise auch zwei (aber auch höchstens so viele) imaginär sein können.

Wenn wir voraussetzen, dass alle drei Doppelpunkte reell sind, so kann es geschehen, dass zweie von ihnen in einem einzigen Punkt des Trägers zusammenfallen. Angenommen, der Doppelpunkt d^1 falle mit dem Doppelpunkt d^2 zusammen, so werden wir die beiden vereinigten Doppelpunkte kurz mit d^{12} bezeichnen. In diesem Falle muss selbstverständlich der dritte Doppelpunkt reell sein. Dieser letztere kann aber möglicherweise mit dem Punkte d^{12} auch zusammenfallen und dann wollen wir den Punkt des Kegelschnittes, in welchem alle drei Doppelpunkte d^1, d^2, d^3 vereinigt liegen, kurz mit d^{123} bezeichnen. Wir haben somit folgende zwei Hauptspezialfälle zu unterscheiden:

1) Von den drei Doppelpunkten zweier einzweideutigen Punktsysteme auf einem Kegelschnitte K fallen die beiden d^1 und d^2 in dem Punkte d^{12} zusammen; der dritte Doppelpunkt d^3 ist dann immer reell.

2) Alle drei Doppelpunkte d^1, d^2, d^3 fallen in einem Punkte d^{123} zusammen.

Es ist nicht schwer in jedem dieser Fälle anzugeben, was für eine Lage der Reductionskegelschnitt der beiden Punktsysteme bezüglich eines Punktepaares ee_1 construirt, gegen den Träger K haben müsse. Wir wissen nämlich aus Art. 27, dass der durch e gehende Reductionskegelschnitt R den Träger in den drei weiteren Punkten d^1, d^2, d^3 trifft. Sollen nun die zwei ersten von ihnen im Punkte d^{12} zusammenfallen, so muss offenbar der Reductionskegelschnitt R den Träger K in diesem Punkte d^{12} einfach berühren; denn dann schneidet er ihn an dieser Stelle in zwei zusammenfallenden Punkten. Sollen zweitens alle drei Doppelpunkte im Punkte d^{123} zusammenfallen, so muss R den Kegelschnitt K an dieser Stelle (nämlich in d^{123}) in drei aufeinanderfolgenden Punkten schneiden, d. h. denselben von der zweiten Ordnung berühren oder einfach oskuliren.

Wenn also ein doppelter Doppelpunkt beider Systeme existirt, so berühren sich in demselben der Träger und der Reductionskegelschnitt einfach; gibt es aber einen dreifachen Doppelpunkt, so oskuliren einander die beiden Curven in demselben. Um in diesen zwei Fällen den Reductionskegelschnitt zu erhalten, werden wir folgende zwei Aufgaben zu lösen haben:

1) Durch drei Punkte einen Kegelschnitt zu legen, welcher einen anderen in einem gegebenen Punkte einfach berührt.

2) Durch zwei Punkte einen Kegelschnitt zu legen, welcher einen zweiten in einem gegebenen Punkte einfach oskulirt.

Gehen wir zunächst an die Lösung der Aufgabe (1), bei welcher wir überdiess annehmen können, dass der eine von den drei gegebenen Punkten auf dem Kegelschnitte liegt, welcher gegeben ist. Wir stellen die Aufgabe in folgender Form. Es ist ein fester Kegelschnitt K Fig. 24 (Taf. III) gegeben; man soll durch die Punkte $1, 2, e$, von denen der letzte auf K liegt, einen Kegelschnitt R legen, welcher K im Punkte d^{12} berührt.

Die Aufgabe ist an und für sich eine gewöhnliche Kegelschnittsconstruction. Denn wir haben in der That von R vier Punkte: $1, 2, e, d^{12}$ und im letzteren die Tangente (nämlich diejenige von K, welche auch R als solche angehört) gegeben. Aus diesen Daten kann man sofort mittelst des Pascal'schen Satzes den Kegelschnitt R construiren. Wir wollen jedoch die Sache anders auffassen und den Kegelschnitt R aus dem Kegelschnitte K als collinear Verwandte entstehen lassen.

Zu dem Ende ist es jedoch nöthig, den vierten Schnittpunkt d^3 von K und R zu bestimmen, was einfach in folgender Weise geschehen kann.

Man ziehe von d^{12} nach 1 und 2 Strahlen, welche K resp. in $1'$ und $2'$ treffen, verbinde dann e mit dem Schnitte von $\overline{12}$ und $\overline{1'2'}$, so ist diess die gemeinsame Sehne σ beider Kegelschnitte, welche K in dem vierten Schnittpunkte d^3 schneiden wird.

Nun kann man K und R als collinear verwandte Curven betrachten, indem man den Berührungspunkt d^{12} zum Collineationscentrum und die gemeinschaftliche Sehne σ zur Collineationsaxe nimmt. Dem Punkte 1 entspricht dann auf K der Punkt $1'$ und dem Punkte 2 entspricht der Punkt $2'$. Man kann nun in leichter Weise zu jedem Punkte des Kegelschnittes K den entsprechenden auf R construiren. Nimmt man beispielsweise auf K den Punkt c' an, und verlangt man den ihm auf R entsprechenden Punkt c zu finden, so kann man zunächst die Linie $\overline{c'd^{12}}$ ziehen, auf welcher (als dem Collineationsstrahle) der gesuchte Punkt c liegen muss. Zieht man ferner die Linie $1'c'$ und durch ihren Schnittpunkt mit der Collineationsaxe σ nach 1 eine weitere Gerade, so schneidet diese den Collineationsstrahl $\overline{c'd^{12}}$ in dem gesuchten Punkt c. Insbesondere für uns wichtig ist die Erledigung folgender Fragen:

a) Bestimme den Punkt η_1, in welchem der durch e gehende Strahl Y_1 den Kegelschnitt R trifft. Die Lösung liegt auf der Hand; man wird sich zum Strahle Y_1, welchen man zum Systeme R rechnet, den collinear verwandten Strahl Y_1' suchen, welcher K in η_1' schneiden möge. Der Strahl $\overline{d^{12}\eta_1'}$ bestimmt dann auf Y_1 den verlangten Punkt η_1.

Die Construction ist in der Figur durchgeführt und bedarf wohl keiner weiteren Erklärung.

b) Bestimme das Punktepaar ξ_1 ξ_2, in welchem der durch den Punkt e_1 gehende Strahl X den Kegelschnitt R durchschneidet. Dabei ist der Punkt e_1 ein beliebiger Punkt des Kegelschnittes K. Die Auflösung ist ebenso einfach, wie in der vorigen Aufgabe. Man rechnet nämlich den Strahl X zu dem System R, sucht den ihm im System K entsprechenden Strahl X' (siehe die Figur), welcher K in einem Punktepaare ξ_1' ξ_2' schneidet. Projicirt man dieses Punktepaar von d^{12} auf den Strahl X, so erhält man das gesuchte Punktepaar ξ_1 ξ_2.

Die zweite zu lösende Hauptaufgabe, welche wir uns gestellt haben, bestand darin: „durch zwei Punkte e und 1 Fig. 25 (Taf. III) einen Kegelschnitt so zu legen, dass er einen Kegelschnitt K in einem gegebenen Punkte d^{123} oskulirt.“

Dieser Fall geht aus dem eben behandelten in einfacher Weise dadurch hervor, dass der Punkt d^3 mit dem Berührungspunkte d^{12} in dem Punkte d^{123} zusammenfällt. (Wir können nämlich auch hier voraussetzen, dass der Punkt e auf der Peripherie des gegebenen Kegelschnittes K liege.) Dann muss also die gemeinsame Sehne σ der Kegelschnitte K und R durch den Punkt d^{123} hindurchgehen. Es erübrigt jedoch noch die Construction des Kegelschnittes R; in diesem Falle bleibt sie dieselbe, wie in dem vorigen, nur fällt hier das Collineationscentrum d^{123} in die Collineationsaxe σ. Verbindet man d^{123} mit e, so erhält man die Linie σ und wenn man den Strahl $\overline{d^{123}1}$ zieht, so trifft dieser den Kegelschnitt K in $1'$.

Um nun zu einem Punkte c' des Kegelschnittes K den entsprechenden c des Kegelschnittes R zu construiren, ziehe den Strahl $\overline{c'd^{123}}$, auf welchem c liegen muss und verbinde den Schnitt von $\overline{c'1'}$ und σ mit 1, welche Gerade den Strahl $\overline{c'd^{123}}$ in dem gesuchten Punkte c schneidet.

Abermals haben wir folgende zwei Aufgaben zu lösen:

a) Den Schnittpunkt η_1 eines durch e gehenden Strahles Y_1 mit dem Kegelschnitte R zu finden.

Man construire zu Y_1 (indem man Y_1 zum System R rechnet) den entsprechenden Strahl Y_1' (siehe die Figur). Derselbe trifft K im Punkte η_1', welcher von d^{123} auf Y_1 projicirt, den verlangten Punkt η_1 liefert.

b) Man bestimme die beiden Schnittpunkte ξ_1 ξ_2 des durch einen Punkt e_1 des Kegelschnittes K gehenden Strahles X mit dem Kegelschnitte R.

Construire zu X (als dem System R angehörig) den entsprechenden Strahl X', welcher K in ξ_1' ξ_2' schneidet. Projicirt man dieses Punktepaar von d^{123} aus auf den Strahl X, so erhält man das gesuchte Punktepaar ξ_1 ξ_2.

35. Nachdem wir im vorigen Artikel die beiden Hauptaufgaben über die besonderen Lagen des Reductionskegelschnittes zu dem Träger der beiden Punktsysteme genügend untersucht haben, erübrigt uns in diesem Artikel die Erledigung der beiden letzten die Vervollständigung zweier einzweideutigen Punktsysteme betreffenden Aufgaben.

I. „Von zwei einzweideutigen Punktsystemen auf dem Kegelschnitte (Kreise) K Fig. 26 (Taf. III) sind drei Punktepaare aa_1, bb_1, ee_1 und ein zweifacher Doppelpunkt d^{12} gegeben. Man soll den dritten Doppelpunkt d^3, die Verzweigungspunkte v, w und die Doppelpunkte v_{12}, w_{12} des zweideutigen Systems construiren und die beiden Punktsysteme vervollständigen."

Nimmt man das Punktepaar ee_1 zu Scheiteln der beiden Hülfsbüschel, so erhält man von dem zugehörigen Reductionskegelschnitte R drei Punkte und den Berührungspunkt d^{12} desselben mit dem Träger K. Der Reductionskegelschnitt R berührt nämlich, wie gezeigt wurde, den Träger K im zweifachen Doppelpunkte d^{12}, geht durch den Scheitel e des zweideutigen Hülfsbüschels und durch die Schnitte von ea_1 mit $e_1 a$ und von eb_1 mit $e_1 b$, welche wir kurz mit 1, 2 bezeichnen wollen.

Nun hat man weiter nichts zu thun, als die Figur 24 (Taf. III) zu reproduciren.

Man ziehe also zunächst die Strahlen $\overline{d^{12}1}$ und $\overline{d^{12}2}$, welche K resp. in $1'$ und $2'$ schneiden und verbinde den Punkt e mit dem Schnitte von $\overline{12}$ und $\overline{1'2'}$, was uns die gemeinschaftliche Sehne σ der beiden Kegelschnitte K und R liefert. Dieselbe trifft K in dem dritten Doppelpunkte d^3.

Nun wird es ein Leichtes sein, folgende, die Vervollständigung beider Systeme betreffenden Hauptaufgaben aufzulösen:

1) Zu einem Punkte y_1 des zweideutigen Systems den entsprechenden y des eindeutigen zu construiren.

Man ziehe von e nach y_1 den Strahl Y_1, betrachte ihn als zum System R gehörig und construire den ihm im System K entsprechenden Strahl Y_1' [1]). Derselbe schneidet K in dem (immer reellen) Punkte η_1', welchen man von d^{12} auf Y_1 zu projiciren hat, um den Schnittpunkt η_1 des Strahles Y_1 mit dem Reductionskegelschnitt R zu erhalten. Verbindet man nun den Punkt η_1 mit dem Punkte e_1, so erhält man den Y_1 entsprechenden Strahl Y des reducirten Hülfsbüschels, welcher K in dem gesuchten Punkte y schneiden wird.

---

[1]) Diess geschieht einfach in folgender Weise: Man projicire den Schnittpunkt von Y_1 mit $\overline{12}$ aus d^{12} auf $\overline{1'2'}$ und verbinde den so erhaltenen Punkt mit dem Punkte e der Collineationsaxe, wodurch man den gesuchten Strahl Y_1' erhält.

2) Zu einem Punkte x des eindeutigen Systems das im zweideutigen entsprechende Punktepaar x_1, x_2 zu construiren.

Man ziehe von e_1 nach x den Strahl X und suche zu ihm (als zum System R gehörig) den im System K entsprechenden Strahl X' einfach dadurch, dass man den Schnitt von X und $\overline{12}$ aus d^{12} auf $\overline{1'\,2'}$ projicirt und den erhaltenen Punkt mit dem Schnittpunkte von X und σ verbindet. Der Strahl X' trifft nun K in einem (reellen oder imaginären) Punktepaare $\xi_1'\,\xi_2'$, welches man von d^{12} auf X zu projiciren hat, um das Schnittpunktepaar $\xi_1\,\xi_2$ des letzteren Strahles mit dem Reductionskegelschnitte zu erhalten. Verbindet man nun ξ_1, ξ_2 mit e durch das Strahlenpaar X_1, X_2 (welches im zweideutigen Hülfsbüschel dem Strahle X entspricht), so trifft dieses den Träger K in dem gesuchten Punktepaar x_1, x_2.

3) Die Verzweigungspunkte v, w und die Doppelpunkte v_{12}, w_{12} des zweideutigen Systems zu construiren.

Um die Verzweigungspunkte v, w des eindeutigen Systems zu erhalten, hätte man von e_1 aus an den Reductionskegelschnitt R die beiden Tangenten V und W zu ziehen, welche K in diesem Punktepaare durchschneiden.

Auch diese Aufgabe kann man leicht dadurch lösen, dass man R als die collinear Verwandte von K betrachtet. Man bestimmt sich nämlich den dem Punkte e_1 (als zum System R gehörig) entsprechenden Punkt e_1' des Systems K, indem man bemerkt, dass dem Strahl X der Strahl X' entspricht. Projicirt man nun e_1 aus d^{12} auf diesen Strahl X', so erhält man den Punkt e_1'. Von e_1' gehen an K die beiden Tangenten V' und W', welche zurückprojicirt die Strahlen V und W liefern. Das Zurückprojiciren geschieht einfach dadurch, dass man e_1 mit den beiden Schnittpunkten von V' und W' mit σ resp. verbindet, um die Strahlen V und W zu erhalten.

Diese beiden Strahlen V und W sind die Verzweigungsstrahlen des eindeutigen Hülfsbüschels und schneiden den Träger K in den zwei Verzweigungspunkten v und w des eindeutigen Punktsystems.

Projicirt man aus d^{12} die Berührungspunkte ν_{12}' und ω_{12}' der Tangenten V' und W' auf die beiden Verzweigungsstrahlen V und W, so erhält man die beiden Punkte ν_{12} und ω_{12}, welche mit e verbunden, die Doppelstrahlen V_{12}, W_{12} des zweideutigen Hülfsbüschels geben. Diese Doppelstrahlen treffen nun den Träger K in den beiden Doppelpunkten v_{12}, w_{12} des zweideutigen Punktsystems.

Man würde die beiden Doppelpunkte v_{12}, w_{12} und dann auch die ihnen entsprechenden Verzweigungspunkte unabhängig von R erhalten haben, indem man nämlich wieder die, durch das zweideutige System gebildete Involution auf K benützte. Ueberhaupt kann mittelst dieser Involution, welche zum eindeutigen System projectivisch ist, die Ver-

vollständigung ebenso vor sich gehen, wie es im Art. 28 gelehrt wurde. Wir wollen darauf, um den Aufsatz nicht übermässig lang zu machen, nicht weiter eingehen und überlassen es dem Leser.

II. „Von zwei einzweideutigen Punktsystemen Fig. 27 (Taf. III) auf dem Kegelschnitte K sind zwei Punktepaare ee_1, cc_1 und der dreifache Doppelpunkt d^{123} beider Systeme gegeben. Man soll die beiden Punktsysteme vervollständigen, die Verzweigungspunkte und die Doppelpunkte des zweideutigen Systems construiren."

Man nehme abermals das Punktepaar ce_1 zu Scheiteln der beiden Hülfsbüschel, so entspricht dem Strahle ec_1 der Strahl e_1c und ihr Schnittpunkt 1 gehört dem Reductionskegelschnitte R an. Dieser muss überdiess durch e (als den Scheitel des zweideutigen Hülfsbüschels) gehen und K im Punkte d^{123} einfach oskuliren. Wir können daher denselben nach der zweiten Aufgabe des vorigen Artikels in einfacher Weise construiren.

Die Vervollständigung beider Systeme kommt nun auf die Lösung folgender Hauptaufgaben zurück:

1) Zu einem Punkte y_1 des zweideutigen Systems den entsprechenden Punkt y des eindeutigen zu finden.

Man ziehe den Strahl $ey_1 = Y_1$ und bestimme zu ihm (als zum Systeme R gehörig) den im Systeme K entsprechenden Strahl Y_1'.

Es entspricht nämlich dem Punkte 1 der Schnittpunkt 1′ von $\overline{1\,d^{123}}$ mit K und man braucht daher nur auf Y_1 einen willkührlichen Punkt p zu nehmen, zu ihm nach den Gesetzen der Collineation den entsprechenden Punkt p' zu finden und diesen mit dem Schnitte e von Y_1 und σ (σ ist die Collineationsaxe $\overline{ed^{123}}$) zu verbinden, um Y_1' zu erhalten. Der Strahl Y_1' trifft K in einem Punkte η_1', welcher aus d^{123} auf Y_1 projicirt, den Schnittpunkt η_1 dieses Strahles mit dem Reductionskegelschnitt R liefert. Verbindet man nun η_1 mit e_1, so ergibt sich der dem Y_1 im eindeutigen Hülfsbüschel entsprechende Strahl Y, welcher K in dem gesuchten Punkte y schneidet.

2) Zu einem Punkte x des eindeutigen Systems das entsprechende Punktepaar x_1, x_2 des zweideutigen Systems zu construiren.

Man ziehe den Strahl $e_1 x = X$ des eindeutigen Hülfsbüschels, rechne ihn zum Systeme R und construire nach den Prinzipien der Collineation den ihm entsprechenden Strahl X' im Systeme K. (Indem man den Schnitt von X mit Y_1 auf Y_1' aus d^{123} projicirt und den erhaltenen Punkt mit dem Schnitt von X und σ verbindet.)

Der Strahl X' trifft K in dem Punktepaare $\xi_1' \xi_2'$, welches aus d^{123} auf X projicirt das Schnittpunktepaar $\xi_1 \xi_2$ des Strahles X mit dem Reductionskegelschnitte R liefert. Zieht man nun von e nach ξ_1, ξ_2 das Strahlenpaar X_1, X_2, so bestimmt dieses auf K das verlangte Punktepaar x_1, x_2.

3) Die Verzweigungspunkte v, w und die Doppelpunkte v_{12}, w_{12} des zweideutigen Systems zu construiren.

Um v und w zu erhalten, hätte man von e_1 aus an den Reductionskegelschnitt R das Tangentenpaar V, W zu ziehen, welches auf K das erwähnte Punktepaar bestimmt.

Diess geschieht wieder mittelst der zu R collinear verwandten Figur K. Projicirt man nämlich e_1 aus d^{123} auf X', so erhält man den Punkt e_1', von welchem an K das Tangentenpaar V', W' gezogen werden kann. Das ihm entsprechende Strahlenpaar V, W wird gegeben durch die Verbindungslinien von e_1 mit dem Schnittpunktepaar von V', W' auf σ. Das Paar V, W trifft nun K in dem Verzweigungspunktepaare v, w. Wenn man nun die Berührungspunkte v_{12}', ω_{12}' des Tangentenpaares V', W' von d^{123} aus resp. auf V und W in dem Punktepaare v_{12}, ω_{12} projicirt, und dieses mit e durch das Strahlenpaar V_{12} W_{12} verbindet, so erhält man die Doppelstrahlen des zweideutigen Hülfsbüschels, welche K in den Doppelpunkten v_{12}, w_{12} des zweideutigen Systems treffen.

Wir wollen auch hier dem Leser die analogen Entwickelungen mittelst der im zweideutigen System auftretenden Involution, welche mit dem eindeutigen Systeme projectivisch ist, überlassen.

36. Wir haben in Art. 33 gesehen, dass zwei einzweideutige Tangentensysteme auf einem Kegelschnitte K drei Doppeltangenten D^1, D^2, D^3 besitzen. Bezüglich dieser können die reciproken Spezialitäten auftreten zu denen, welche wir bei Punktsystemen kennen gelernt haben.

Erstlich kann es geschehen, dass zwei von den Doppeltangenten, z. B. D^1 und D^2 zusammenfallen, wesshalb sie dann kurz als eine zweifache Doppeltangente und mit D^{12} bezeichnet werden. Soll diess eintreffen, so muss der Reductionskegelschnitt R der beiden Systeme den Träger K auf der doppelten Doppeltangente D^{12} einfach berühren.

Zweitens können alle drei Doppeltangenten D^1, D^2, D^3 zusammenfallen, in welchem Falle sie eine dreifache Doppeltangente bilden und mit D^{123} bezeichnet werden. Soll dieses eintreffen, so muss der Reductionskegelschnitt R den Träger K in der dreifachen Doppeltangente D^{123} einfach oskuliren.

Um Tangentensysteme, bei welchen der eine oder andere dieser speziellen Fälle eintritt, zu vervollständigen, hat man wieder folgende zwei Constructionen durchzuführen.

1) Einen Kegelschnitt R zu zeichnen, welcher drei Gerade E, 1, 2 und den festen Kegelschnitt K in der Tangente D^{12} einfach berührt.

2) Einen Kegelschnitt R zu zeichnen, welcher die zwei Geraden E, 1 berührt und den festen Kegelschnitt K in der Tangente D^{123} oskulirt.

Die Lösung geschieht in reciproker Weise zu jener, welche in Art. 34 ausführlich gegeben wurde.

Wir werden die Vervollständigung spezieller einzweideutiger Tangentensysteme umsoweniger eingehend entwickeln, als sie nichts neues liefert und, wie schon gesagt wurde, das Duale zu jener der Punktsysteme ist. Wir schreiten gleich zur Betrachtung der beiden hieher gehörigen Hauptfälle:

I. „Von zwei einzweideutigen Tangentensystemen auf dem Kegelschnitte K Fig. 28 (Taf. III) sind drei Tangentenpaare BB_1, CC_1, EE_1 und die doppelte Doppeltangente D^{12} gegeben; man soll die dritte Doppeltangente D^3 construiren, die beiden Tangentensysteme vervollständigen und auch die Verzweigungstangenten V, W, sowie die Doppeltangenten V_{12}, W_{12} des zweideutigen Systems finden.“

Man nehme das Tangentenpaar EE_1 zu Trägern der reducirt liegenden Punktreihen, für deren Reductionskegelschnitt R man 4 Tangenten nebst dem Berührungspunkte einer derselben erhält. Die vier Tangenten sind die Verbindungslinien von EB_1 mit E_1B, von EC_1 mit E_1C (welche wir kurz mit 1 und 2 bezeichnen), der Träger E der zweideutigen Hülfsreihe und die doppelte Doppeltangente D^{12}. Der Berührungspunkt der letzteren mit K ist gleichzeitig ihr Berührungspunkt mit R.

Man kann nun wieder den Kegelschnitt R mit Vortheil als collinear Verwandte des Kegelschnitts K betrachten, wenn die doppelte Doppeltangente D^{12} als die Collineationsaxe angenommen wird. Es entspricht dann der Tangente 1 die von ihrem Schnitt mit D^{12} an K gezogene Tangente 1′ und der Tangente 2 ebenso die von ihrem Schnitt mit D^{12} an K gezogene Tangente 2′. Dem Schnittpunkte von 1 und 2 entspricht somit der Schnittpunkt von 1′ und 2′ und wenn man diese zwei entsprechenden Punkte durch einen Strahl verbindet, so muss dieser durch das Collineationscentrum hindurchgehen. Da dieses auch auf der Tangente E liegen muss (welche beiden Kegelschnitten gemeinschaftlich ist), so ist es der Schnittpunkt σ des erwähnten Strahles mit der Tangente E. Von σ geht an K eine Tangente, welche auch an R eine Tangente und somit die dritte Doppeltangente D^3 der beiden Tangentensysteme ist.

Wir haben nun folgende drei Hauptaufgaben zu lösen:

1) Zu einer Tangente Y_1 des zweideutigen Systems die entsprechende Tangente Y des eindeutigen Systems zu finden.

Man bestimme den Schnittpunkt y_1 von Y_1 mit E, betrachte ihn als zum System R gehörig und construire den ihm im System K entsprechenden Punkt y_1'. Zu dem Zwecke verbinde man y_1 mit dem Schnittpunkte von 1 und 2 und ziehe nach dem Schnittpunkte dieser Linie mit D^{12} von dem Punkte (1′ 2′) eine Linie, welche E in dem

gesuchten Punkte y_1' schneidet. Von y_1' geht nun an K eine Tangente η_1', welche D^{12} in einem Punkte schneidet, welchen man mit y_1 zu verbinden hat, um die von y_1 an R gehende Tangente η_1 zu erhalten. Diese Tangente η_1 trifft E_1 in einem Punkte y, von welchem an K die gesuchte Tangente Y gezogen werden kann.

2) Zu einer Tangente X des eindeutigen Systems das entsprechende Tangentenpaar X_1, X_2 des zweideutigen Systems zu finden.

Man nehme den Schnittpunkt x von X mit E_1 zum Systeme R und construire den ihm im Systeme K entsprechenden Punkt x', indem man den Schnittpunkt von D^{12} mit der Verbindungslinie von x und dem Punkte (12) mit dem Punkte (1′ 2′) verbindet und aus σ den Punkt x auf die so erhaltene Verbindungslinie projicirt. Von diesem Punkte x' lassen sich an K zwei Tangenten ξ_1', ξ_2' ziehen, deren Schnitte mit D^{12} mit x verbunden, das von x an den Kegelschnitt R gehende Tangentenpaar ξ_1, ξ_2 liefern. Das Tangentenpaar ξ_1, ξ_2 trifft E in dem x entsprechenden Punktepaare x_1, x_2, von welchem an K die beiden gesuchten Tangenten X_1, X_2 gezogen werden können.

3) Die Verzweigungstangenten V und W und die Doppeltangenten V_{12}, W_{12} des zweideutigen Systems zu construiren.

Um die Verzweigungstangenten V, W des eindeutigen Systems zu erhalten, hätte man die Schnittpunkte von E_1 mit dem Reductionskegelschnitt R zu finden, von welchen an K die beiden Verzweigungstangenten gezogen werden können. Zur Lösung der Aufgabe construire man die der Geraden E_1 (als zum System R gehörig) entsprechende Gerade E_1', indem man ihren Schnittpunkt mit D^{12} mit dem Punkte x' verbindet. Die Gerade E_1' trifft K in zwei Punkten v' und w', welche aus σ auf E_1 projicirt resp. die zwei Punkte v und w liefern. Die zwei Punkte v und w sind die Verzweigungspunkte der eindeutigen Hülfsreihe, von denen an K das Verzweigungstangentenpaar V und W gezogen werden kann.

Verbindet man die Schnittpunkte von D^{12} mit den Tangenten v_{12}', ω_{12}' der Punkte v' und w' mit den Punkten v und w, so schneiden die erhaltenen Verbindungslinien den Träger E in dem Doppelpunktepaar v_{12}, w_{12} der zweideutigen Hülfsreihe, von welchem an K die verlangten Doppeltangenten V_{12}, W_{12} gehen.

II. „Von zwei einzweideutigen Tangentensystemen auf dem Kegelschnitte K Fig. 29 (Taf. III) sind zwei Tangentenpaare EE_1, CC_1 und die dreifache Doppeltangente D^{123} beider Systeme gegeben. Man soll die Systeme vervollständigen, die Verzweigungstangenten und die Doppeltangenten des eindeutigen Systems construiren.“

Abermals ist das eine Tangentenpaar (wieder etwa EE_1) zu Trägern der einzweideutigen Hülfsreihen zu nehmen. Von dem Reductionskegelschnitte R sind nun zwei Tangenten, nämlich E und die Ver-

bindungslinie 1 von EC_1 mit $E_1 C$ gegeben. Da derselbe den Kegelschnitt K in der Tangente D^{123} oskuliren muss, so ist er vollkommen bestimmt.

Zur Auflösung der folgenden drei Hauptfragen wird abermals die Betrachtung des Reductionskegelschnittes R als der collinear Verwandten des Kegelschnittes K von Nutzen sein. Bei dieser Verwandtschaft ist D^{123} die Collineationsaxe und ihr Schnittpunkt σ mit der Tangente E ist das Collineationscentrum. Der Tangente 1 entspricht die von ihrem Schnittpunkte mit D^{123} an K gezogene Tangente 1'.

1) Zu einer Tangente Y_1 des zweideutigen Systems die entsprechende Tangente Y des eindeutigen Systems zu construiren.

Man bestimme den Schnittpunkt y_1 von Y_1 mit E und bestimme zu ihm (als zum System R gehörig) den ihm im System K entsprechenden Punkt y_1'. Man braucht nur durch y_1 einen willkührlichen Strahl P zu ziehen und mittelst des Paares 1, 1' entsprechender Strahlen den ihm entsprechenden Strahl P' nach den Gesetzen der Collineation zu zeichnen, welcher dann E im Punkte y_1' schneidet. Von y_1' geht an K eine Tangente η_1', deren Schnittpunkt auf der Collineationsaxe D^{123} mit y_1 verbunden, den Strahl η_1 liefert. Dieser trifft E_1 in dem, dem y_1 auf der eindeutigen Reihe entsprechenden Punkte y, von welchem aus man an K die gesuchte Tangente Y ziehen kann.

2) Zu einer Tangente X des eindeutigen Systems das entsprechende Tangentenpaar X_1, X_2 des zweideutigen Systems zu construiren.

Man rechne den Schnittpunkt x von X mit E_1 zu dem Systeme R und construire zu ihm den im System K entsprechenden Punkt x'. Man hat da nur x mit y_1 zu verbinden und den Schnittpunt von $\overline{xy}_1$ und D^{123} mit y_1' zu verbinden und auf die so erhaltene Gerade x aus σ zu projiciren.

Von x' lassen sich an K zwei Tangenten ξ_1', ξ_2' ziehen, deren Schnitte auf D^{123} mit x verbunden zwei Strahlen ξ_1, ξ_2 liefern, welche E in dem, dem x entsprechenden Punktepaare x_1, x_2 schneiden. Von x_1 und x_2 hat man nur noch an K die verlangten zwei Tangenten X_1, X_2 zu ziehen.

3) Die Verzweigungstangenten V und W und die Doppeltangenten V_{12}, W_{12} des zweideutigen Systems zu finden.

Die Verzweigungstangenten V und W sind die, von den Schnittpunkten von E_1 mit R an K gezogenen Tangenten. Um die erwähnten Schnittpunkte v und w zu finden, zeichne man die zu E_1 (als zum System R gehörig) entsprechende Gerade E_1', indem man einfach den Schnitt von E_1 auf D^{123} mit x' verbindet. Die Schnitte von E_1' mit K, welche v', w' heissen, sind aus σ auf E_1 zu projiciren, wodurch man die Punkte v und w erhält, von welchen aus an K die beiden Verzweigungstangenten V und W gehen. Verbindet man nun die

Schnittpunkte der Tangenten v_{12}', w_{12}' der Punkte v', w' auf D^{123} mit den resp. Punkten v und w, so bestimmen die so erhaltenen Verbindungslinien $v_{12}\, w_{12}$ auf E die Doppelpunkte v_{12}, w_{12} der zweideutigen Hülfsreihe. Von v_{12}, w_{12} gehen nun an K die beiden Doppeltangenten V_{12}, W_{12} des zweideutigen Tangentensystems.

Auch die in diesem Artikel vorgetragenen Constructionsmethoden hätten durch Verwendung der im zweideutigen Tangentensysteme auftretenden Involution modificirt werden können.

37. Mit der Theorie der einzweideutigen Punkt- und Tangentensysteme auf Kegelschnitten ist auch gleichzeitig jene der einzweideutigen Elementargebilde auf demselben Träger abgethan.

Wir wollen uns daher nur darauf beschränken, zu zeigen, wie man zwei einzweideutige concentrische Strahlenbüschel mittelst einzweideutiger Punktsysteme eines Kegelschnittes, und zwei einzweideutige coaxiale Punktreihen mittelst einzweideutiger Tangentensysteme eines Kegelschnitts vervollständigt.

„Wenn zwei einzweideutige Strahlenbüschel mit demselben Scheitel t durch die genügende Zahl von Bestimmungsstücken (Strahlen) gegeben sind, dieselben zu vervollständigen.“

Man lege durch den Scheitel t beider Büschel einen sonst willkührlichen Constructionskreis K, welcher von den beiden Büscheln in zwei einzweideutigen Punktsystemen getroffen wird. War von den Büscheln eine genügende Zahl von Elementen gegeben, so wird man für die beiden Punktsysteme auf K ebenfalls eine genügende Zahl von Elementen erhalten. Man wird daher die beiden Punktsysteme auf K vervollständigen können und mit Hülfe derselben auch die beiden Büschel. Verbindet man nämlich ein Paar von entsprechenden Punkten, z. B. z, z_1 der beiden Punktsysteme mit dem Scheitel t, so erhält man ein Paar Z, Z_1 entsprechender Strahlen der beiden Büschel. Man hat sich dabei an folgende Regel zu halten, welche eines Beweises gar nicht bedürftig ist:

1) Ein Paar entsprechender Strahlen, wie z. B. A, A_1 der beiden Büschel trifft K in einem Paare a, a_1 entsprechender Punkte der beiden Hülfspunktsysteme; ein Paar entsprechender Punkte, wie z und z_1 der beiden Punktsysteme mit t verbunden, liefert ein Paar entsprechender Strahlen der beiden Büschel, nämlich Z, Z_1.

2) Insbesondere treffen die Verzweigungsstrahlen V und W des eindeutigen Büschels den Constructionskreis K in dem Verzweigungspunktepaare v und w des eindeutigen Systems, und umgekehrt liefern die Verzweigungspunkte v, w mit t verbunden, die Verzweigungsstrahlen V, W des eindeutigen Büschels.

3) Die Doppelstrahlen V_{12}, W_{12} des zweideutigen Büschels treffen

K in den Doppelpunkten v_{12} und w_{12} des zweideutigen Punktsystems und vice versa.

4) Die drei Doppelstrahlen D^1, D^2, D^3 beider Büschel treffen K in den drei Doppelpunkten d^1, d^2, d^3 beider Systeme und umgekehrt.

5) Ein zweifacher Doppelstrahl D^{12} oder ein dreifacher Doppelstrahl D^{123} trifft K in einem resp. zweifachen Doppelpunkt d^{12} oder einem dreifachen Doppelpunkt d^{123} beider Punktsysteme und umgekehrt. Mit einem Worte: die beiden Büschel auf t sind mit den beiden Punktsystemen auf K perspectivisch gelegen, so zwar, dass auch die singulären Elemente der Büschel mit den singulären Elementen der Punktsysteme perspectivisch liegen.

Wir wollen in Kürze ein Beispiel skizziren:

„Zwei einzweideutige Strahlenbüschel mit dem gemeinschaftlichen Scheitel t sind durch die fünf Strahlenpaare AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, EE_1 gegeben; man soll sie vervollständigen.“

Man lege durch t den Constructionskreis K, welcher die fünf Strahlenpaare in den fünf Punktepaaren aa_1, bb_1, cc_1, dd_1, ee_1 der beiden einzweideutigen Punktsysteme schneidet. Die beiden Punktsysteme können nun nach Art. 26 vervollständigt werden. Soll nun zu dem Strahle X, welcher zum eindeutigen Büschel zählt, das entsprechende Strahlenpaar X_1, X_2 des zweideutigen Büschels construirt werden, so construire man zu dem Schnittpunkte x von K und X, indem man denselben zum eindeutigen Punktsysteme rechnet, das im zweideutigen Systeme entsprechende Punktepaar x_1, x_2, welches mit t verbunden, das verlangte Strahlenpaar liefert.

Um zu dem Strahle Y_1 des zweideutigen Büschels den entsprechenden Strahl Y des eindeutigen zu finden, suche man zu seinem Schnitt y_1 mit K als zum zweideutigen System gehörig den entsprechenden Punkt y, und verbinde diesen mit t; dann hat man Y.

Die beiden Punktsysteme auf K haben drei Doppelpunkte d^1, d^2, d^3, welche mit t verbunden die drei Doppelstrahlen D^1, D^2, D^3 der beiden Büschel liefern. Ebenso erhält man, wenn man die Verzweigungspunkte v, w des eindeutigen Systems und die Doppelpunkte v_{12}, w_{12} des zweideutigen Systems mit t verbindet resp. die Verzweigungsstrahlen V, W des eindeutigen und die Doppelstrahlen V_{12}, W_{12} des zweideutigen Büschels.

Wie man zu verfahren hat, wenn unter den, die beiden Büschel bestimmenden Strahlenpaaren auch Verzweigungs-Doppelstrahlen oder mehrfache Doppelstrahlen vorkommen, wird aus den angeführten Regeln leicht zu ersehen sein.

Was für concentrische Strahlenbüschel gesagt wurde, gilt in reciproker Form von coaxialen Punktreihen.

Hat man auf einer und derselben Geraden T zwei einzweideutige

Punktreihen etwa durch fünf Punktepaare aa_1, bb_1, cc_1, dd_1, ee_1 gegeben und man soll sie vervollständigen, so lege man einen, T berührenden, sonst beliebigen Constructionskreis und an diesen von den fünf Punktepaaren die fünf Tangentenpaare AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, EE_1 der beiden einzweideutigen Hülfstangentensysteme auf K.

Diese zwei Tangentensysteme, werden also ebenfalls immer durch die erforderliche Zahl von Elementenpaaren gegeben sein und daher vervollständigt werden können. Soll nun zum Punkte x das entsprechende Punktepaar x_1, x_2 gefunden werden, so suche man zu der von x an K gezogenen Tangente X das entsprechende Tangentenpaar X_1, X_2, welches T in x_1, x_2 schneidet. Ebenso leicht findet man zu einem Punkte y_1 der zweideutigen Reihe den entsprechenden Punkt y der eindeutigen Reihe.

Die drei Doppeltangenten D^1, D^2, D^3 beider Tangentensysteme liefern auf T die drei Doppelpunkte d^1, d^2, d^3 beider Punktreihen und ebenso liefern die Tangenten V, W, V_{12}, W_{12} auf T resp. die Punkte v, w, v_{12}, w_{12}, wobei die Bedeutung der Buchstaben eine bekannte ist.

Man sieht also, dass man in der That die auf concentrische Büschel und coaxiale Reihen bezüglichen Fragen übertragen kann auf Punkt- und Tangentensysteme eines Kegelschnittes. Die Analogie der Construction mit jener, wie sie bei projectivischen Gebilden auftritt, wird bei Verwendung der vorgetragenen Prinzipien eine wesentliche Erleichterung verschaffen.

Wir bemerken noch einmal, dass für Punktreihen dieselben Regeln gelten, wie wir sie im Anfange dieses Artikels für Büschel aufstellten, natürlich aber in reciproker Form.

Ich halte mich bei diesem Gegenstande um so lieber nicht länger auf, als ich bei Gelegenheit der Theorie der Curven dritter Ordnung und vierter Classe, dritter Ordnung und dritter Classe und schliesslich jener der vierten Ordnung und dritten Classe auf diese Sachen in ihrer Anwendung zurückkomme und sich dieselben viel klarer darbieten werden.

38. Es erübrigt nur noch eine Frage zu erledigen, welche in Art. 9 aufgeworfen wurde und die Entstehung der Doppelelemente zweier einzweideutigen Gebilde auf demselben Träger betrifft. Wir wollen uns zwei einzweideutige Strahlenbüschel mit demselben Scheitel t denken.

Ein Doppelstrahl D^1 derselben entsteht dadurch, dass ein Strahl des einen Büschels mit einem ihm im zweiten Büschel entsprechenden Strahle zusammenfällt oder kurz durch das Zusammenfallen eines einfachen Paares entsprechender Strahlen. Es kann nun auch geschehen, dass ein Verzweigungsstrahl, z. B. V mit dem ihm entsprechenden Doppelstrahl V_{12} zusammenfällt und es frägt sich dann: „entsteht ein

Doppelstrahl beider Büschel von gewöhnlicher Art oder hat man einen solchen als einen zweifachen Doppelstrahl zu betrachten?" Denn in der That fällt in diesem Falle der Strahl V mit beiden ihm entsprechenden Strahlen V_1 und V_2 zusammen.

In dieser Angelegenheit erhalten wir von den einzweideutigen Punktsystemen auf einem Kegelschnitte Aufklärung, indem ja die, die Büschel betreffenden Fragen von den Punktsystemen beantwortet werden.

Geht man nun in die Figur 21 (Taf. III) zurück, wo d^1, d^2, d^3 die drei Doppel- und v, w die zwei Verzweigungspunkte sind, so findet sich sofort, dass der von uns angeführte Fall eintritt, wenn der Reductionskegelschnitt durch v gehend $\overline{ev}$ berührt. Dann ist v der Verzweigungs- und zugleich der Doppelpunkt, wesshalb er mit v_{12} zusammenfallen muss. Man sieht auch gleich, dass diesem besonderen Falle nur eine spezielle Anordnung des Trägers K zu dem Reductionskegelschnitt R entspricht und dass dabei die übrigen Doppelpunkte d^2, d^3 in ihrer Natur keine Veränderung erleiden. Ja es kann noch auch weiter w und w_{12} mit d^2 zusammenfallen, d. h. es können zwei Doppelpunkte der betrachteten speziellen Natur auftreten und es gibt dann noch immer einen dritten Doppelpunkt d^3. Wir können daher sagen:

„Das Zusammenfallen eines Verzweigungselementes mit dem ihm entsprechenden Doppelelemente erzeugt ein gewöhnliches Doppelelement beider Gebilde."

Durch diese Antwort ist die aufgeworfene Frage in demselben Sinne erledigt, wie es in Art. 9 angedeutet wurde.

Zweiter Theil.

„Geometrie der Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte, der Curven dritter Classe mit einer Doppeltangente und der Curven dritter Ordnung dritter Classe.“

Mit Figurentafeln IV. u. V.

1. Wir haben in Art. 12. des ersten Theiles gesehen, dass zwei ein-zweideutige Gebilde die Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte und jene der dritten Classe mit einer Doppeltangente als Erzeugnisse liefern.

Wir wollen der Kürze halber eine algebraische Curve mit dem Buchstaben C bezeichnen, welchem oben der Ordnungs- und unten der Classenindex der Curve beigefügt werden soll. Eine Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte ist von der vierten Classe, wesshalb ihr Symbol C_4^3 ist; eine Curve dritter Classe mit einer Doppeltangente ist von der vierten Ordnung und wird daher mit C_3^4 bezeichnet.

Zwischen den beiden Curvenarten C_4^3 und C_3^4 steht als Mittelglied die Curve dritter Ordnung und dritter Classe, deren Symbol C_3^3 ist und welche eine Spitze und eine Wendetangente besitzt. Diese Curve entsteht ebensogut aus C_4^3 wie aus C_3^4 und zwar aus der ersteren dadurch, dass die Tangenten des Doppelpunktes zusammenfallen, und aus der letzteren dadurch, dass die Berührungspunkte der Doppeltangente zusammenfallen. Es bildet desshalb die Curve C_3^3 eine Uebergangsart zwischen C_4^3 und C_3^4. Wir fassen die Curve C_4^3 als eine Ortscurve auf, da wir sie nur durch zwei Strahlenbüschel entstehen sahen, und ebenso die Curve C_3^4 nur als Enveloppe, da sie uns nur als das Erzeugniss von Punktreihen entgegentrat. Die Curve C_3^3 dagegen kann von uns ebensowohl als Ortscurve, wie auch als Enveloppe betrachtet werden, da sich alle Eigenschaften an ihr in reciproker Art vorfinden.

Jede Eigenschaft, die ihr als Ort eines Punktes zukommt, findet sich in reciproker Fassung an ihr als Enveloppe gleichfalls vor.

2. Wir wissen, dass zwei ein-zweideutige Strahlenbüschel, wenn sie sich nicht in reducirter Lage befinden, jedesmal eine Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte erzeugen. Es erübrigt nun zu zeigen, dass umgekehrt jede solche Curve als das Erzeugniss zweier ein-zweideutigen Büschel angesehen werden könne.

Eine Curve C_4^3 dritter Ordnung mit dem Doppelpunkte δ Fig. 1 (Taf. IV) wird von jeder Geraden ihrer Ebene in drei Punkten getroffen. Geht die Gerade durch den Doppelpunkt δ, so fallen zwei von den drei Schnittpunkten in diesen Punkt. Jede durch δ gehende Gerade schneidet demnach die Curve ausser in δ nur noch einmal. Jedem Punkte der Curve entspricht auf diese Weise ein, durch den

Doppelpunkt gehender Strahl und umgekehrt. Wir wollen einen durch den Doppelpunkt δ gehenden Strahl kurz einen Doppelpunktstrahl nennen und den Punkt, in welchem er die Curve C_4^3 trifft, als den ihm „entsprechenden" Punkt bezeichnen. So wäre z. B. in der Figur a_1 der dem Strahle A_1 entsprechende Punkt und umgekehrt A_1 der dem Punkte a_1 entsprechende Doppelpunktstrahl.

„Die Punkte der Curve C_4^3 sind den Strahlen aus δ perspectivisch zugeordnet und umgekehrt."

Durch den Doppelpunkt δ gehen zwei Zweige der Curve und es gibt demnach zwei Punkte, welche dem Doppelpunkte unendlich nahe liegen. Die ihnen entsprechenden Strahlen sind die Tangenten G_1, G_2 der Curve im Doppelpunkte. Wir nennen diese Tangenten kurz die „Doppelpunktstangenten." Wenn man durch einen beliebig auf der Curve C_4^3 gewählten Punkt t Strahlen zieht, so wird jeder derselben die Curve in einem weiteren Punktepaar treffen. So z. B. der Strahl A in a_1, a_2, der Strahl B in b_1, b_2 u. s. w. Jedem Strahle des Büschels t entspricht auf diese Weise ein Punktepaar der Curve, und wenn man von den Punkten der Curve auf die ihnen entsprechenden Doppelpunktsstrahlen übergeht, so kann man jedem Strahle des Büschels t ein Strahlenpaar des Büschels δ entsprechen lassen. Wenn man die Doppelpunktsstrahlen mit denselben aber grossen Buchstaben bezeichnet wie die Punkte der Curve, denen sie entsprechen, so enspricht dem Strahle A des Büschels t das Strahlenpaar A_1, A_2 des Büschels δ, dem Strahle B das Strahlenpaar B_1, B_2 u. s. f. Frägt man nun umgekehrt: wie viele Strahlen des Büschels t entsprechen einem Strahle des Büschels δ? — so erhält man zur Antwort: Jedem Strahle des Büschels δ entspricht ein Strahl des Büschels t. Der erstere Strahl schneidet die Curve C_4^3 in einem Punkte, welcher mit t verbunden den, ihm entsprechenden Strahl des Büschels t liefert. Die beiden Strahlenbüschel t und δ sind somit in einer derartigen Beziehung, dass jedem Strahle des ersteren ein Strahlenpaar des letzteren, aber jedem Strahle des letzteren nur ein einziger Strahl des ersteren entspricht.

Die beiden Büschel t und δ sind somit nach Art. 4 des 1. Theiles in ein-zweideutiger Beziehung oder es sind zwei ein-zweideutige Büschel.

Unsere Curve C_4^3 erscheint als das Erzeugniss der beiden Büschel t und δ.

Das eindeutige Büschel hat t und das zweideutige hat δ zum Scheitel.

Der Scheitel t des eindeutigen Büschels war ein ganz beliebig gewählter Punkt der Curve C_4^3. Jeder Lage des Punktes t entspricht ein besonderes, die Curve erzeugendes Büschelpaar, doch haben alle so auftretenden zweideutigen Büschel den Doppelpunkt δ der Curve zum gemeinschaftlichen Scheitel.

Da die Strahlenpaare $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ . . . des zweideutigen Büschels eine quadratische Involution bilden (Art. 11. 1. Th.), so können wir folgenden Satz aussprechen:

„Verbindet man die auf Strahlen aus einem Punkte der Curve durch diese bestimmten Punktepaare mit dem Doppelpunkte durch Strahlen, so bilden diese eine quadratische Strahleninvolution.“

Jedem Punkte t der Curve C_4^3 entspricht auf diese Art eine Strahleninvolution mit dem Scheitel δ, welcher Involution auch das Doppelpunktstangentenpaar als ein Strahlenpaar angehört. Denn, wenn der durch t gehende Strahl des eindeutigen Büschels in die Lage G übergeht, in welcher er auch den Punkt δ enthält, so bestimmt er auf C_4^3 das dem Doppelpunkte unendlich nahe Punktepaar, welchem das Tangentenpaar G_1, G_2 entspricht.

Dieses Strahlenpaar G_1 G_2 gehört also allen Involutionen an, wie sie den verschiedenen Lagen des Punktes t entsprechen.

Die Doppelstrahlen dieser Involutionen werden daher selbst wieder eine Involution bilden, deren Doppelstrahlen G_1 G_2 sind.

Wir kommen darauf gleich wieder zurück und wollen jetzt das ins Auge gefasste Büschelpaar t, δ noch näher betrachten.

Von besonderem Interesse sind die Verzweigungsstrahlen des eindeutigen Büschels t (1. Th. Art. 7.). Es werden diess jene zwei Strahlen sein, welche die Curve in zwei zusammenfallenden Punkten schneiden, also berühren.

„Die Verzweigungsstrahlen des eindeutigen Büschels sind die von seinem Scheitel an die Curve gezogenen beiden Tangenten.“

Es sind diess in der Figur die Strahlen V und W. Die Tangente V berührt C_4^3 in v_{12} und W in w_{12}.

Die von δ nach v_{12} und w_{12} gehenden Strahlen V_{12} und W_{12} sind die Doppelstrahlen des zweideutigen Büschels.

„Die Doppelstrahlen des zweideutigen Büschels schneiden die ihnen resp. entsprechenden Verzweigungsstrahlen in den Berührungspunkten der letzteren mit der Curve.“

Der Winkel der Doppelstrahlen V_{12}, W_{12} wird von jedem Strahlenpaare des zweideutigen Büschels harmonisch getheilt. So sind also A_1 A_2 V_{12} W_{12}, $B_1 B_2$ V_{12} W_{12} u. s. w. Gruppen harmonischer Strahlen.

Dem gemeinschaftlichen Strahle beider Büschel entspricht, wenn man ihn zum eindeutigen Büschel rechnet, das Doppelpunktstangentenpaar im zweideutigen Büschel.

Rechnet man ihn jedoch zum zweideutigen Büschel, so mag er, wie im Art. 22. des 1. Theiles, mit L_1 bezeichnet werden. Es ent-

spricht ihm dann im eindeutigen Büschel nach dem daselbst Gesagten die Tangente L der Curve C_4^3 im Punkte t.

3. Dasselbe, was über Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte gesagt wurde, gilt in reciproker Form von den Curven dritter Classe mit einer Doppeltangente, wesshalb wir uns darüber ganz kurz fassen wollen.

Sowie das Erzeugniss zweier einzweideutigen Büschel im Allgemeinen eine Curve C_4^3 dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte ist, so erzeugen zwei einzweideutige Punktreihen eine Curve dritter Classe, für welche der Träger der zweideutigen Reihe eine Doppeltangente ist.

Umgekehrt kann auch jede vorliegende Curve C_3^4 dritter Classe mit einer Doppeltangente $\varDelta$ Fig. 2 (Taf. IV) auf unendlich viele Arten durch zwei ein-zweideutige Punktreihen entstanden gedacht werden.

Durch jeden Punkt der Ebene gehen drei Tangenten der Curve C_3^4. Liegt der Punkt jedoch auf der Doppeltangente, so geht ausser dieser nur noch eine einzige Tangente durch ihn. So entspricht jedem Punkte der Doppeltangente $\varDelta$ eine Tangente der Curve und umgekehrt jeder Tangente ein Punkt auf $\varDelta$.

Nimmt man nun eine beliebige Tangente T der Curve an, so gehen von jedem ihrer Punkte an die Curve C_3^4 zwei Tangenten, welche die Doppeltangente $\varDelta$ in einem Punktepaar schneiden.

So z. B. von a die Tangenten A_1, A_2, welche $\varDelta$ in dem Punktepaare a_1, a_2 und von b die Tangenten B_1 B_2, welche $\varDelta$ in b_1, b_2 schneiden. Jedem Punkte (a) von T kann man das Punktepaar (a_1, a_2) von $\varDelta$ zuordnen, in welchem diese Doppeltangente von dem durch den Punkt gehenden Tangentenpaar $(A_1\ A_2)$ geschnitten wird.

In dieser Art entspricht jedem Punkte von T ein Punktepaar von $\varDelta$ und jedem Punkte von $\varDelta$ ein einzelner Punkt von T.

Die beiden Punktreihen T und $\varDelta$ sind in einzweideutiger Beziehung, so zwar, dass T die eindeutige und $\varDelta$ die zweideutige Reihe ist; die Curve C_3^4 erscheint als das Erzeugniss der beiden Reihen. Man sieht also, dass, weil die Tangente T ganz beliebig gewählt wurde, die Curve C_3^4 als das Erzeugniss unendlich vieler Reihenpaare betrachtet werden könne. Die sämmtlichen hierbei auftretenden zweideutigen Reihen besitzen die Doppeltangente $\varDelta$ zum gemeinsamen Träger.

Wegen der durch die zweideutige Reihe gebildeten Involution können wir folgenden die Curven dritter Classe mit einer Doppeltangente betreffenden Satz aussprechen:

„Die von Punkten einer Tangente der Curve an sie gehenden Tangentenpaare bestimmen auf der Doppeltangente eine quadratische Punktinvolution.“

Auf diese Art entspricht jeder Tangente der Curve auf der Doppel-

tangente eine besondere Involution. Alle diese Involutionen besitzen ein gemeinschaftliches Punktepaar, nämlich jenes, in welchem die Curve von der Doppeltangente berührt wird. Dieses Punktepaar $g_1 g_2$ entspricht dem jeweiligen Schnittpunkte g von T mit Δ, dem gemeinschaftlichen Punkte der beiden Reihen.

Die Doppelpunkte aller der auf Δ entstehenden Punktinvolutionen bilden daher selbst wieder eine Involution, deren Doppelpunkte g_1, g_2 sind.

Die Verzweigungspunkte v und w der eindeutigen Reihe auf T sind offenbar die beiden Schnittpunkte dieser Tangente mit der Curve C_3^4.

Denn von diesen gehen an die Curve die Paare zusammenfallender Tangenten V_{12} und W_{12}, welche dann die Doppeltangente Δ in den Doppelpunkten v_{12} und w_{12} der zweideutigen Reihe treffen.

„Die Verzweigungspunkte der eindeutigen Reihe sind die Schnittpunkte des Trägers mit der Curve."

„Die Doppelpunkte der zweideutigen Reihe mit den ihnen resp. entsprechenden Verzweigungspunkten verbunden, liefern die Tangenten der Curve in den letzteren."

Es versteht sich von selbst, dass die Punktgruppen: $v_{12}\, w_{12}\, a_1\, a_2$, $v_{12}\, w_{12}\, b_1\, b_2$, u. s. w. harmonisch sind, da v_{12} und w_{12} die Doppelpunkte der Involution auf Δ sind.

Es wurde schon gesagt, dass dem gemeinschaftlichen Punkte g beider Reihen in der zweideutigen Reihe das Berührungspaar g_1, g_2 der Doppeltangente entspricht. Wenn man diesen Punkt g zu der zweideutigen Reihe rechnet, so soll er mit l_1 bezeichnet werden, und es entspricht ihm dann auf T der Berührungspunkt l dieser Tangente mit der Curve.

4. Wenn zwei projectivische Gebilde in eine Ebene gelegt werden, so erzeugen sie immer einen Kegelschnitt. Dabei denken wir uns entweder zwei projectivische Punktreihen oder aber zwei projectivische Strahlenbüschel und denken uns dieselben nicht in perspectivischer Lage, weil dann entweder ein Punkte- oder Geradenpaar als Erzeugniss auftreten würde.

Es frägt sich nun, ob, wenn zwei einzweideutige Gebilde nach und nach in verschiedene gegenseitige Lagen gebracht werden, immer eine und dieselbe Curvenart entstehe oder nicht.

Wir wollen uns mit dieser Frage beschäftigen, aber im Vorhinein die reducirte Lage der beiden Gebilde (siehe Art. 13. und 14. des 1. Theiles) ausschliessen, weil in dieser das Erzeugniss immer in einen Kegelschnitt und eine Gerade oder einen Punkt zerfällt.

Wir denken uns zunächst zwei ein-zweideutige Strahlbüschel. Das eindeutige habe den Scheitel t und das zweideutige den Scheitel δ; beide werden in eine Ebene hineingelegt.

Das Erzeugniss derselben wird eine Curve dritter Ordnung sein,

welche in δ einen Doppelpunkt besitzt und welcher auch der Punkt t angehören wird.

Was nun die Natur des Doppelpunktes δ anbelangt, so haben wir zwei Fälle zu unterscheiden.

Das zweideutige Büschel kann nämlich entweder reell oder aber complex sein (siehe Art. 8. des 1. Theiles). Erstens, sei das zweideutige Büschel δ reell. Dann entspricht jedem Strahle des Büschels t ein reelles Strahlenpaar des Büschels δ. Mögen also die beiden Büschel wie immer zu einander gelegt werden, es wird immer dem gemeinschaftlichen Strahle G beider Büschel, im zweideutigen Büschel ein reelles Strahlenpaar G_1 G_2 entsprechen. Da dieses Strahlenpaar die Tangenten der erzeugten Curve $C_4{}^3$ im Doppelpunkte δ bildet, so wird dieser Doppelpunkt unter allen Bedingungen ein eigentlicher sein. In diesem Falle sind die Verzweigungsstrahlen des eindeutigen Büschels imaginär, wesshalb der Scheitel t desselben ein solcher Punkt der Curve wird, von welchem aus an sie keine reelle Tangente gezogen werden kann. Also:

„Legt man ein eindeutiges mit einem ihm verwandten **reellen** zweideutigen Strahlenbüschel in eine Ebene, so erzeugen die beiden Büschel in jeder Lage eine Curve dritter Ordnung mit einem eigentlichen Doppelpunkte. Der Scheitel des eindeutigen Büschels wird ein solcher Curvenpunkt, von welchem sich an die Curve keine reelle Tangente ziehen lässt."

Wenn zweitens das zweideutige Büschel complex ist, so wird das eindeutige durch die beiden Verzweigungsstrahlen in zwei Partien so getheilt, dass jedem Strahle der einen ein reelles, und jedem Strahle der anderen ein imaginäres Strahlenpaar des zweideutigen Büschels entspricht. Wir wollen, des kürzeren Ausdruckes wegen, die erste Partie als den „reellen Theil," und die zweite als den „imaginären Theil" des eindeutigen Büschels bezeichnen.

Der Scheitel δ des zweideutigen Büschels kann nun beim Aneinanderlegen der beiden Büschel im Allgemeinen in den einen oder den anderen Theil des eindeutigen Büschels fallen.

Fällt δ in den reellen Theil des Büschels t, so wird der gemeinschaftliche Strahl G beider Büschel jedenfalls ein solcher sein, welchem im zweideutigen Büschel ein reelles Strahlenpaar G_1 G_2 entspricht. In diesem Falle ist also δ wieder ein eigentlicher Doppelpunkt, der durch die beiden Büschel erzeugten Curve $C_4{}^3$. Fällt jedoch der Scheitel δ in den imaginären Theil des eindeutigen Büschels, so wird das, dem gemeinsamen Strahle G entsprechende Strahlenpaar G_1 G_2 imaginär und folglich δ ein isolirter Doppelpunkt der erzeugten Curve werden. In beiden Fällen ist jedoch das vom Punkte t aus an $C_4{}^3$ gehende

Tangentenpaar (das Verzweigungsstrahlenpaar des eindeutigen Büschels) der Annahme gemäss reell. Wir können desshalb sagen:

„Legt man ein eindeutiges mit einem ihm verwandten **complexen** zweideutigen Strahlenbüschel in eine Ebene, so erzeugen die beiden Büschel eine Curve dritter Ordnung mit einem eigentlichen oder isolirten Doppelpunkte, je nachdem der Scheitel des zweideutigen Büschels in den reellen oder imaginären Theil des eindeutigen Büschels zu liegen kömmt. Der Scheitel des eindeutigen Büschels wird ein solcher Curvenpunkt, von welchem sich an die Curve zwei reelle Tangenten ziehen lassen."

Die Natur der durch die beiden Büschel erzeugten Curve ist also abhängig von der Natur des beiden Büscheln gemeinschaftlichen Strahles. Entspricht diesem im zweideutigen Büschel ein reelles Strahlenpaar, so entsteht eine Curve mit eigentlichem Doppelpunkte; entspricht ihm ein imaginäres Strahlenpaar, so entsteht eine Curve mit isolirtem Doppelpunkte.

Der gemeinschaftliche Strahl beider Büschel kann jedoch auch von ganz besonderer Natur sein. Er kann nämlich ein Doppelstrahl des zweideutigen, oder ein Verzweigungsstrahl des eindeutigen Büschels sein.

Ist es ein Doppelstrahl des zweideutigen Büschels, so schneidet er den ihm entsprechenden Verzweigungsstrahl des eindeutigen Büschels im Scheitel des letzteren. Der Berührungspunkt der einen vom Scheitel des eindeutigen Büschels an die erzeugte Curve gelegten Tangente fällt in diesen Scheitel, wesshalb er ein Inflexionspunkt der Curve wird.

Wenn wir, um etwas Bestimmtes vor Augen zu haben, annehmen, dass der Doppelstrahl V_{12} zum gemeinsamen Strahle wird, so fällt V_{12} mit L_1 und daher V mit L zusammen, d. h. die vom Scheitel t des eindeutigen Büschels an die Curve C_4^3 gezogene Tangente V fällt mit der im Punkte t an C_4^3 gezogenen Tangente L zusammen und somit ist t wirklich ein Inflexionspunkt der Curve. Somit:

„Legt man ein complexes zweideutiges Büschel so zu einem ihm verwandten eindeutigen Büschel, dass ein Doppelstrahl des ersteren durch den Scheitel des letzteren hindurchgeht, so entsteht eine Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte, für welche der Scheitel des eindeutigen Büschels ein Inflexionspunkt ist."

Die Inflexionstangente ist der dem betreffenden Doppelstrahle entsprechende Verzweigungsstrahl. Der Doppelpunkt kann hierbei sowohl ein eigentlicher als auch ein isolirter werden. — Wenn der gemeinschaftliche Strahl beider Büschel ein Verzweigungsstrahl des eindeutigen Büschels ist, so entspricht ihm im zweideutigen Büschel ein Paar

zusammenfallender Strahlen, nämlich ein Doppelstrahl. Das dem gemeinsamen Strahle entsprechende Strahlenpaar bildet jedoch die Tangenten der erzeugten Curve im Doppelpunkte. Die beiden Tangenten des Doppelpunktes fallen also in diesem Falle zusammen, oder der Doppelpunkt wird zu einem Rückkehrpunkte oder zu einer Spitze. Daher:

„Legt man ein eindeutiges Strahlenbüschel so zu einem ihm verwandten complexen zweideutigen, dass ein Verzweigungsstrahl des ersteren durch den Scheitel des letzteren hindurchgeht, so entsteht eine Curve dritter Ordnung mit einem Rückkehrpunkte."

Die Tangente des Rückkehrpunktes ist der dem betreffenden Verzweigungsstrahle entsprechende Doppelstrahl.

Es wird Aufgabe des nächsten Artikels sein, zu zeigen, dass eine Curve dritter Ordnung mit einem Rückkehrpunkte von der dritten Classe ist. —

Aehnliche Betrachtungen gelten für die Curven C_3^4 der dritten Classe mit einer Doppeltangente.

Hat man zwei ein-zweideutige Punktreihen T, $\varDelta$, von welchen die zweideutige Reihe reell ist, so erzeugen sie in jeder Lage in einer Ebene eine Curve dritter Classe mit einer eigentlichen Doppeltangente. Die Berührungspunkte der Doppeltangente $\varDelta$ mit der erzeugten Curve C_3^4 entsprechen dem Schnittpunkte g von T und $\varDelta$, und sind nach Annahme immer reell.

„Wenn die zweideutige Reihe von zwei ein-zweideutigen Reihen reell ist, so erzeugen sie immer eine Curve dritter Classe mit eigentlicher Doppeltangente. Die zwei Schnittpunkte des Trägers der eindeutigen Reihe mit der erzeugten Curve sind immer imaginär."

Denn diese zwei Schnittpunkte sind ja die zwei, in diesem Falle imaginären Verzweigungspunkte der eindeutigen Reihe. Ist die zweideutige Reihe complex, so sind die Verzweigungs- und Doppelpunkte reell, und erstere theilen die eindeutige Reihe in zwei Partien: den reellen und den imaginären Theil. Der reelle Theil ist jener, welcher solche Punkte enthält, denen in der zweideutigen Reihe reelle Punktepaare entsprechen, und der imaginäre Theil ist jener, dessen Punkten imaginäre Punktepaare entsprechen.

Da nun die Berührungspunkte der Doppeltangente dem gemeinschaftlichen Punkte beider Reihen entsprechen, so wird diese eine eigentliche sein, wenn der gemeinschaftliche Punkt im reellen Theile der eindeutigen Reihe liegt, oder mit anderen Worten, wenn der Träger $\varDelta$ der zweideutigen Reihe den Träger T der eindeutigen im reellen Theile schneidet. Schneidet $\varDelta$ den Träger T im imaginären

Theile, so wird die Doppeltangente eine isolirte (ideelle). Wir können demnach sagen:

„Eine eindeutige mit einer ihr verwandten complexen zweideutigen Reihe erzeugt eine Curve dritter Classe mit einer eigentlichen oder nur ideellen Doppeltangente, je nachdem die eindeutige Reihe von der zweideutigen im reellen oder imaginären Theile geschnitten wird. Die beiden Schnittpunkte der eindeutigen Reihe mit der erzeugten Curve sind immer reell.“

Denn diese Schnittpunkte sind die Verzweigungspunkte der eindeutigen Reihe, welche nach Annahme complex ist. Wir haben nun noch die Fälle zu betrachten, wenn der gemeinschaftliche Punkt beider Reihen ein Doppel- oder ein Verzweigungspunkt ist.

Ist der gemeinschaftliche Punkt ein Doppelpunkt der zweideutigen Reihe, etwa der Punkt v_{12}, so ist T als Verbindungslinie von v mit v_{12} (weil v und v_{12} jetzt auf T liegen) die Curventangente im Punkte v. Da nun v_{12} mit l_1 $(= g)$ zusammenfällt, so fällt auch l auf v oder mit anderen Worten: der eine von den beiden Schnittpunkten der Tangente T mit der Curve fällt mit ihrem Berührungspunkte (l) zusammen, wesshalb T, da wir es mit einer Enveloppe zu thun haben, eine Spitzentangente der Curve wird. Die Spitze oder der Rückkehrpunkt ist der Punkt v selbst.

„Legt man eine complexe zweideutige Punktreihe so auf eine ihr verwandte eindeutige Reihe, dass ein Doppelpunkt der ersteren auf die letztere fällt, so erzeugen die beiden Reihen eine Curve dritter Classe mit einer Doppeltangente, für welche Curve der Träger der eindeutigen Reihe eine Rückkehrtangente ist.“

Ist der gemeinschaftliche Punkt beider Reihen ein Verzweigungspunkt der eindeutigen Reihe T, so entspricht ihm auf Δ ein Doppelpunkt. Es fallen also die Berührungspunkte der Doppeltangente zusammen, und diese wird dadurch eine Wende- oder Inflexionstangente. Wir werden im nächsten Artikel zeigen, dass die erzeugte Curve von der dritten Ordnung sei, können aber jetzt das Ergebniss folgendermassen ausdrücken:

„Legt man eine eindeutige Punktreihe so zu einer complexen ihr verwandten zweideutigen, dass ein Verzweigungspunkt der ersteren auf letztere fällt, so entsteht eine Curve dritter Classe mit einer Wendetangente.“

Der Inflexionspunkt ist der dem betreffenden Verzweigungspunkte entsprechende Doppelpunkt.

5. Wir haben im vorhergehenden Artikel bei einer besonderen Lage der ein-zweideutigen Gebilde gesehen, dass deren Erzeugnisse

Curven dritter Ordnung mit einem Rückkehrpunkte und dritter Classe mit einer Wendetangente werden. Es soll nun gezeigt werden, dass diese beiden Curvenarten identisch sind. Den Beweis werden wir dadurch führen, dass wir zeigen, dass die erstere Curvenart von der dritten Classe und die letztere von der dritten Ordnung ist.

Gehen wir zunächst von einer Curve $C_4{}^3$ dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte, also von der vierten Classe aus. Wir haben im Art. 2. gesehen, dass jedem Punkte t der Curve eine Strahleninvolution entspricht, welche den Doppelpunkt δ zum Scheitel hat und welche entsteht, indem man Strahlen durch t legt und deren Schnittpunktepaare mit der Curve aus δ durch Strahlenpaare projicirt. Die Doppelstrahlen dieser Involution theilen den Winkel des Doppelpunktstangentenpaares G_1, G_2 harmonisch und schneiden die Curve $C_4{}^3$ in den Berührungspunkten der, von t an sie gezogenen Tangenten.

Wird aus dem Doppelpunkte δ eine Spitze, so fallen seine Tangenten G_1, G_2 zusammen und bilden einen, allen den einzelnen Punkten der Curve entsprechenden Involutionen gemeinschaftlichen Doppelstrahl, welcher die Curve ausser in der Spitze weiter nicht mehr schneidet. Von den zwei durch einen beliebigen Punkt der Curve an sie gehenden Tangenten bleibt daher nur eine einzige eine eigentliche, indem die andere durch die Verbindungslinie des Punktes mit dem Rückkehrpunkte ersetzt wird.

Von jedem Punkte der Curve lässt sich an dieselbe nur eine einzige Tangente ziehen, und da die Tangente in dem Punkte für zweie zählt, so haben wir im ganzen drei durch den Punkt gehende Tangenten und somit ist die Curve von der dritten Classe.

Die Classenzahl einer allgemeinen Curve dritter Ordnung ist sechs und wird durch das Auftreten eines Doppelpunktes auf vier und durch das Auftreten einer Spitze auf drei reducirt.

„Eine Curve dritter Ordnung mit einem Rückkehrpunkte ist von der dritten Classe.“

Das Symbol für dieselbe ist demnach: $C_3{}^3$.

Das Reciproke tritt bei den Curven $C_3{}^4$ dritter Classe mit einer Doppeltangente ein, wenn diese Doppeltangente durch das Zusammenfallen ihrer Berührungspunkte zu einer Wendetangente wird.

Von den zwei Schnittpunkten irgend einer Tangente der Curve mit dieser bleibt nur einer ein eigentlicher, weil der andere durch den Schnittpunkt der Tangente mit der Wendetangente ersetzt wird. Jede Tangente hat also drei Punkte mit der Curve gemein und sonach ist die Curve von der dritten Ordnung.

Die allgemeine Curve dritter Classe, welche von der sechsten Ordnung ist, wird von der vierten Ordnung beim Auftreten einer Doppel-

tangente und nur mehr von der dritten Ordnung, wenn eine Wendetangente auftritt.

„Eine Curve dritter Classe mit einer Wendetangente ist von der dritten Ordnung.“

Ihr Symbol ist ebenfalls C_3^3.

Die beiden Curvenarten sind also wirklich identisch. Wir werden später sehen, dass sich leicht beweisen lässt, dass eine Curve dritter Ordnung mit einer Spitze nur eine Inflexionstangente und eine Curve dritter Classe mit einer Inflexionstangente nur eine Spitze haben könne und haben müsse.

6. Von jedem Punkte t einer Curve C_4^3 dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte lassen sich an dieselbe zwei (reelle oder imaginäre) Tangenten V und W ziehen, welche die Curve an den resp. Punkten v_{12} und w_{12} berühren. Die beiden Punkte v_{12} und w_{12} wollen wir in Bezug auf den Punkt t als die diesem Punkte „zugeordneten Punkte“ bezeichnen. Der Punkt t ist für die ihm zugeordneten Punkte der Tangentialpunkt. Dieselben zwei Punkte sollen zur Bezeichnung ihrer gegenseitigen Beziehung, zwei „conjugirte Punkte“ genannt werden.

„Zwei conjugirte Punkte[1]) der Curve sind solche, welche einen und denselben Tangentialpunkt besitzen.“

Wenn wir die zwischen den Curvenpunkten bestehenden Beziehungen auf die ihnen entsprechenden Doppelpunktsstrahlen übertragen, so sollen die beiden durch v_{12} und w_{12} gehenden Strahlen V_{12} und W_{12} (bekanntlich nichts anderes als die Doppelstrahlen der dem Punkte t entsprechenden Strahleninvolution mit dem Scheitel δ) als die, dem durch t gehenden Doppelpunktsstrahle, welchen wir S nennen wollen, „zugeordneten Doppelpunktsstrahlen“ bezeichnet werden. Den Strahl S können wir dann den „Tangentialstrahl“ der Strahlen V_{12} und W_{12} nennen.

„Jedem Doppelpunktsstrahle ist ein Strahlenpaar zugeordnet, für welches der erstere der Tangentialstrahl ist.“

Das einem Doppelpunktsstrahle zugeordnete Strahlenpaar ist das Doppelstrahlenpaar jener Strahleninvolution, welche ihm oder vielmehr seinem Schnittpunkte mit der Curve entspricht. Nun ist das Doppelpunktstangentenpaar allen diesen Involutionen gemeinschaftlich und es wird daher sein Winkel durch jedes Paar zugeordneter Strahlen harmonisch getheilt. Die Paare zugeordneter Strahlen bilden somit eine quadratische Strahleninvolution, deren Doppelstrahlen die beiden Doppelpunktstangenten sind.

---

[1]) Hesse nennt zwei solche Punkte zwei „conjugirte Pole.“ Siehe Crelle, Band 36 die Abhandlung: Ueber Curven dritter Ordnung.

„Die Paare zugeordneter (conjugirter) Strahlen bilden eine quadratische Involution, deren Doppelstrahlen die Tangenten der Curve im Doppelpunkte sind.“ —

Ebenso schneidet jede Tangente T einer Curve $C_3{}^4$ dritter Classe mit einer Doppeltangente die Curve in zwei (reellen oder imaginären) Punkten v und w, deren Tangenten V_{12} und W_{12} wir als das, der Tangente T „zugeordnete Tangentenpaar“ bezeichnen. Die beiden Tangenten V_{12}, W_{12} sollen in Bezug auf einander zwei conjugirte Tangenten heissen.

Die Tangente T wird die Doppeltangente Δ in einem Punkte s und das Tangentenpaar V_{12}, W_{12} wird diese Doppeltangente in einem Punktepaare v_{12}, w_{12} schneiden, welches wir als das, dem Punkte s zugeordnete Punktepaar bezeichnen wollen.

„Jedem Punkte der Doppeltangente ist ein anderes Punktepaar zugeordnet.“

Das einem Punkte s von Δ zugeordnete Punktepaar v_{12}, w_{12} ist das Doppelpunktepaar der, der Tangente T (welche durch s geht) entsprechenden Punktinvolution auf Δ und theilt somit die Strecke des Berührungspunktepaares g_1, g_2 der Doppeltangente, welches allen Involutionen gemeinschaftlich ist, harmonisch.

„Die Paare zugeordneter (conjugirter) Punkte bilden eine quadratische Involution, deren Doppelpunkte die Berührungspunkte der Doppeltangente mit der Curve sind.“

7. Wie im vorhergehenden Artikel gezeigt wurde, ist jedem Doppelpunktsstrahle S einer Curve $C_4{}^3$ dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte ein Strahlenpaar zugeordnet. Der Strahl S trifft nämlich die Curve $C_4{}^3$ in einem Punkte t, von welchem aus an die Curve zwei Tangenten gezogen werden können, deren Berührungspunkte mit dem Doppelpunkte δ verbunden, das dem Strahle S zugeordnete Strahlenpaar V_{12}, W_{12} liefern. Betrachtet man jedoch einen Doppelpunktsstrahl, etwa V_{12} als einen zugeordneten, so entspricht ihm nur ein einziger Strahl S, welchem er zugeordnet ist. V_{12} trifft nämlich $C_4{}^3$ in einem Punkte v_{12}, dessen Tangente V die Curve $C_4{}^3$ in einem Punkte s trifft, welcher mit δ verbunden den Strahl S liefert, welchem V_{12} zugeordnet ist. Man erhält auf diese Weise am Doppelpunkte δ zwei ein-zweideutige Strahlenbüschel.

„Die Doppelpunktsstrahlen bilden mit den ihnen zugeordneten Strahlenpaaren zwei ein-zweideutige concentrische Strahlenbüschel.“

Die Doppelstrahlen des zweideutigen Büschels sind, wie schon in Art. 6. gezeigt wurde, die beiden Tangenten der Curve $C_4{}^3$ im Doppelpunkte. Es frägt sich nun nach den, diesen Doppelstrahlen entsprechenden Verzweigungsstrahlen.

Wenn man einen Doppelpunktsstrahl S Fig 3 (Taf. IV) der Curve $C_4{}^3$ betrachtet, so entspricht ihm das Strahlenpaar V_{12}, W_{12}. Nun ist leicht zu übersehen, dass dieses Strahlenpaar nur dann zusammenfallen kann, wenn der Punkt s, d. i. der Schnitt von S mit $C_4{}^3$ unendlich nahe zum Doppelpunkte δ rückt. Der Punkt s kann jedoch auf zwei Arten gegen den Punkt δ unendlich nahe rücken; nämlich auf jedem der beiden durch δ gehenden Curvenzweige. Liegt erstlich s unendlich nahe bei δ auf dem Zweige, welcher S_1 zur Tangente hat, so fällt das zugehörige V_{12} und W_{12} in die Doppelpunktstangente S_2 und der Strahl S geht in S_1 über. Es ist somit S_1 der Verzweigungsstrahl des eindeutigen Büschels, welchem im zweideutigen Büschel der Doppelstrahl S_2 entspricht. Durch eine analoge Betrachtung findet man, dass S_2 der Verzweigungsstrahl des eindeutigen Büschels ist, welchem im zweideutigen der Doppelstrahl S_1 entspricht.

Die beiden von uns betrachteten ein-zweideutigen Büschel besitzen also eine ganz besondere Natur, indem nämlich je ein Verzweigungsstrahl mit dem ihm nicht entsprechenden Doppelstrahle zusammenfällt. Die Doppelpunktstangenten sind also sowohl die Verzweigungsstrahlen des eindeutigen, als auch die Doppelstrahlen des zweideutigen Büschels.

„Construirt man zu jedem Doppelpunktsstrahle das zugeordnete Strahlenpaar, so erhält man zwei ein-zweideutige concentrische Strahlenbüschel, für welche die Doppelpunktstangenten nicht nur die Doppelstrahlen des zweideutigen, sondern auch die ihnen entsprechenden Verzweigungsstrahlen des eindeutigen Büschels vorstellen; und zwar entspricht jeder Doppelpunktstangente als Verzweigungsstrahl die andere als Doppelstrahl."

Diese zwei concentrischen ein-zweideutigen Strahlenbüschel besitzen drei Doppelstrahlen (Art. 9. des 1. Theiles), welche wir kurz mit I^1, I^2, I^3 bezeichnen wollen. In jedem solchen Doppelstrahle beider Büschel sind zwei entsprechende Strahlen beider Büschel vereinigt. Rechnet man z. B. I^1 zum eindeutigen Büschel, so entspricht ihm im zweideutigen Büschel ausser einem anderen Strahle wieder I^1. Der Strahl I^1 schneidet daher die Curve $C_4{}^3$ in einem Punkte i_1, für welchen die eine der beiden von ihm an die Curve gehenden Tangenten mit der in ihm an sie gezogenen Tangente zusammenfällt. Der Punkt i_1 ist also ein Inflexionspunkt der Curve. Ebenso schneiden die beiden anderen Strahlen I^2, I^3 die Curve $C_4{}^3$ in zwei Inflexionspunkten i_2, i_3 derselben.

„Die drei Doppelstrahlen der durch zugeordnete Strahlenpaare bestimmten beiden ein-zweideutigen Büschel schneiden die Curve in ihren drei Inflexionspunkten."

Ausser den so erhaltenen Inflexionspunkten i_1, i_2, i_3 der Curve, können keine weiteren vorkommen.

Um die drei Inflexionspunkte einer Curve C_4^3 wirklich constructiv zu bestimmen, hat man nur nach Art. 37., resp. 27. des 1. Theiles, die drei Doppelstrahlen I^1, I^2, I^3 zu construiren, welche C_4^3 in den gesuchten Punkten schneiden. Die drei Inflexionspunkte der Curve C_4^3 können entweder alle drei reell sein, oder es ist nur ein einziger von ihnen reell und die beiden anderen sind imaginär. Ob der eine oder der andere Fall eintritt, richtet sich nach der Natur des Doppelpunktes δ der Curve. Ist dieser Doppelpunkt ein eigentlicher, d. h. sind seine beiden Tangenten reell, so besitzt die Curve nur einen einzigen reellen Inflexionspunkt; ist dagegen der Doppelpunkt δ ein isolirter, so sind alle drei Inflexionspunkte reell. Den Beweis des eben Gesagten werden wir später bei der Construction der Curve C_4^3 finden und es mag hier nur gezeigt werden, wie sich die Construction der Inflexionspunkte insbesondere dann gestaltet, wenn der Doppelpunkt δ ein eigentlicher ist.

Um zunächst ganz kurz des Falles zu gedenken, wenn der Doppelpunkt ein isolirter ist, so bemerken wir, dass die beiden ein-zweideutigen Büschel, deren drei Doppelstrahlen die Inflexionspunkte liefern (nach Art. 5. des 1. Theiles), durch fünf Paare entsprechender Elemente, also hier Strahlen bestimmt sind. Man wird daher aus fünf beliebigen Punkten a, b, c, d, e der Curve, denen die Doppelpunktstrahlen A, B, C, D, E entsprechen, an die Curve die Tangenten resp. $A_1', B_1', C_1', D_1', E_1'$ ziehen und deren Berührungspunkte mit dem Doppelpunkte δ durch die Strahlen A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 verbinden, welche der Reihe nach den Strahlen A, B, C, D, E entsprechen. Nachdem man nun fünf Paar entsprechender Strahlen der beiden Büschel kennt, kann man leicht in bekannter Weise die drei Doppelstrahlen I^1, I^2, I^3 der beiden Büschel construiren, welche die Curve C_4^3 in den verlangten drei Inflexionspunkten i_1, i_2, i_3 schneiden.

Denselben Vorgang kann man natürlich auch dann benützen, wenn der Doppelpunkt δ ein eigentlicher ist. In diesem Falle führt jedoch ein kürzerer Weg zum Ziele. Es wurde zu Anfang dieses Artikels auf die besondere Natur der beiden ein-zweideutigen, die Inflexionspunkte liefernden Strahlenbüschel hingewiesen. Die beiden Tangenten, des Doppelpunktes nämlich, sind sowohl die Verzweigungsstrahlen des eindeutigen als auch die ihnen entsprechenden Doppelstrahlen des zweideutigen Büschels. Wir wollen diese beiden Doppelpunktstangenten desshalb mit V, W, V_{12}, W_{12} Fig. 4 (Taf. IV) bezeichnen; und zwar ist V und W_{12} eine, und V_{12} und W die andere Doppelpunktstangente.

Die beiden Doppelpunktstangenten liefern uns auf einmal vier

Paar entsprechender Strahlen der beiden ein-zweideutigen Büschel. Es fehlt also zu deren Fixirung nur noch ein einziges Strahlenpaar, welches man erhält, wenn man von dem auf irgend einem Doppelpunktsstrahle A[1]) liegenden Curvenpunkte a' an C_4^3 eine Tangente A' zieht, und deren Berührungspunkt mit dem Doppelpunkte durch den, dem A entsprechenden Strahl A_1 verbindet.

Die beiden Büschel sind nun durch die fünf Strahlenpaare V, V_{12}; W, W_{12}; A, A_1 bestimmt und können nach Art. 37. des ersten Theiles vervollständigt werden. Durch ihre Vervollständigung werden verschiedene die Curve C_4^3 betreffenden Aufgaben gelöst, wesshalb sie näher besprochen werden soll.

Legt man durch δ den sonst beliebigen Constructionskreis K, so bestimmen die Doppelpunktstangenten auf ihm ein Punktepaar v $(=w_{12})$, w $(=v_{12})$, welches sowohl die Verzweigungs- als auch die Doppelpunkte der beiden vermittelnden einzweideutigen Punktsysteme darstellt. Das Strahlenpaar A, A_1, schneidet K in einem weiteren Punktepaar a, a_1.

Die Vervollständigung beider Büschel geschieht nun am einfachsten durch Benützung der Involution, welche das zweideutige Büschel darstellt. Zieht man nämlich in v_{12} und w_{12} (oder in w und v, was dasselbe ist) an den Kreis die Tangenten ν und ω, so schneiden sich diese im perspectivischen Centrum p der auf K entstehenden Punktinvolution und entsprechen projectivisch den beiden Strahlen V und W des eindeutigen Büschels. (Vergleiche Art. 22. des 1. Theiles.) Der durch p nach a_1 gehende Strahl α entspricht projectivisch dem Strahle A und schneidet K zum zweitenmale im Punkte a_2, welcher mit δ durch A_2 verbunden den zweiten, dem A entsprechenden Strahl liefert. Der Strahl A_2 schneidet die Curve C_4^3 im Berührungspunkte der zweiten von a' aus an die Curve gehenden Tangente. Die beiden Büschel: A, V, W und α, ν, ω sind projectivisch. Wir können nun folgende zwei Aufgaben lösen:

1) „Die Berührungspunkte der beiden von einem Punkte der Curve an sie gehenden Tangenten zu finden, ohne die Tangenten zu zeichnen.“

2) „Den Schnittpunkt der in einem Punkte der Curve gezogenen Tangente mit der Curve zu finden, ohne die Tangente zu zeichnen.“

Die Auflösung der ersten Aufgabe kommt darauf hinaus, zu einem Strahle des eindeutigen Büschels das entsprechende Strahlenpaar des zweideutigen zu finden. Denn zieht man von dem Punkte b', welchem der Doppelpunktsstrahl B entspricht, an C_4^3 die beiden Tangenten, so berühren sie die Curve in jenen zwei Punkten, denen die dem B entsprechenden Strahlen B_1, B_2 als Doppelpunktsstrahlen zugehören.

---

[1]) Man wird den Strahl A schicklich annehmen müssen, um zu ihm einen reellen entsprechenden Strahl zu erhalten.

Man findet die beiden Strahlen B_1, B_2 in folgender Art. Zum Strahle B suche man (mittelst des Directionscentrums $\varDelta$) den projectivisch entsprechenden Strahl β des Büschels p; dieser schneidet den Constructionskreis K in einem (reellen oder imaginären) Punktepaare b_1, b_2, welches mit δ verbunden das Strahlenpaar B_1, B_2 liefert. Dieses letztere schneidet die Curve in den gesuchten zwei Punkten. (Wir ersuchen den Leser den betreffenden Theil der Figur selbst zu entwerfen.)

Die zweite Aufgabe, welche das Auffinden des einem Punkte der Curve zugehörigen Tangentialpunktes zum Zwecke hat, wird ebenso wie die erste gelöst. Soll man z. B. zum Punkte b_1' den Tangentialpunkt b' suchen, so lege man durch b_1' den Doppelpunktsstrahl B_1, welcher den Constructionskreis im Punkte b_1 trifft; diesen verbinde man mit p durch den Strahl β und suche zu β den im Büschel δ projectivisch entsprechenden Strahl B. Dieser wird die Curve C_4^3 im gesuchten Punkte b schneiden.

Die Inflexionspunkte der Curve ergeben sich nun in folgender Weise. Die beiden projectivischen Büschel $\delta\,(V, W, A, B\ldots)$ und $p\,(v, \omega, \alpha, \beta\ldots)$ erzeugen einen Kegelschnitt Σ, welcher durch die fünf Punkte $\delta, p, (Vv), (W\omega), (A\alpha)$ bestimmt ist. Dieser Kegelschnitt Σ schneidet den Constructionskreis K ausser in δ, noch in drei weiteren Punkten d^1, d^2, d^3, den Doppelpunkten der beiden ein-zweideutigen Punktsysteme auf K. In unserem Falle ist von den drei Punkten nur der eine d^1 reell, weil nur ein einziger Inflexionspunkt der Curve reell sein kann. Der nach d^1 gezogene Doppelpunktsstrahl I^1 ist ein Doppelstrahl der an δ bestehenden ein-zweideutigen Büschel und schneidet die Curve C_4^3 in dem reellen Inflexionspunkte i_1 derselben. Wenn der Doppelpunkt der Curve ein isolirter ist, so kann man zwar die, die Sache vereinfachenden Doppelpunktstangenten ihrer Imaginärität wegen nicht verwenden, aber die Construction, wie sie in den beiden Aufgaben 1) und 2) angewendet wurde, so wie die Bestimmung der (jetzt insgesammt reellen) Inflexionspunkte bleibt im Wesentlichen dieselbe.

Die drei Inflexionspunkte i_1, i_2, i_3 liegen, ob sie alle drei reell oder zwei imaginär sind in einer und derselben, immer reellen Geraden. Diess folgt aus der bekannten gegenseitigen Lage der neun Inflexionspunkte einer allgemeinen Curve dritter Ordnung und lässt sich auf verschiedene Arten rein geometrisch nachweisen. Wir werden später ebenfalls einen rein geometrischen selbstständigen Beweis kennen lernen.

8. Ebenso erhält man auf der Doppeltangente $\varDelta$ einer Curve C_3^4 dritter Classe zwei ein-zweideutige Punktreihen, deren drei Doppelpunkte s^1, s^2, s^3 die Spitzentangenten S_1, S_2, S_3 der Curve liefern. Wenn man nämlich jedem Punkte der Doppeltangente das ihm zugeordnete Punktepaar (siehe Art. 6.) entsprechen lässt, so erhält man die erwähnten

ein-zweideutigen Reihen. Dieselben sind von ganz besonderer Natur, da die Berührungspunkte g_1, g_2 der Doppeltangente gleichzeitig die Rolle der Verzweigungspunkte und der ihnen entsprechenden Doppelpunkte spielen.

Die Vervollständigung der beiden Reihen, welche wieder mittelst eines Constructionskreises geschehen kann, bringt die Lösung der beiden folgenden Aufgaben mit sich:

1) „Die Tangenten der Curve in den Schnittpunkten derselben mit einer gegebenen Tangente zu construiren, ohne diese Schnittpunkte selbst zu kennen."

2) „Die von dem Berührungspunkte einer Curventangente an die Curve gehende Tangente zu zeichnen, ohne den Berührungspunkt zu kennen."

Die Durchführung der zu obigen Resultaten führenden Betrachtungen ist vollkommen reciprok zu der im vorhergehenden Artikel gegebenen, und es möge sie der Leser selbst durchführen. Was die drei Spitzentangenten S_1, S_2, S_3 der Curve C_3^4 betrifft, so ist zu bemerken, dass sie alle drei durch einen und denselben, immer reellen Punkt hindurchgehen. Die Tangenten S_1, S_2, S_3 selbst können entweder insgesammt reell sein oder es sind zweie von ihnen imaginär und nur eine reell. Der erste Fall tritt dann ein, wenn die Doppeltangente Δ eine ideelle ist, d. h. wenn deren zwei Berührungspunkte g_1, g_2 imaginär sind, während der zweite Fall dann eintritt, wenn die Doppeltangente Δ eine eigentliche ist.

9. Wir haben im 7. Artikel gesehen, dass die den einzelnen Doppelpunktsstrahlen einer Curve C_4^3 dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte zugeordneten Strahlenpaare mit Ersteren zwei einzweideutige Büschel bilden; ferner, dass die Doppelpunktstangenten G_1, G_2 sowohl die Verzweigungsstrahlen des eindeutigen als auch die Doppelstrahlen des zweideutigen Büschels vorstellen. Wenn nun der Doppelpunkt δ der Curve ein isolirter Punkt ist, dann sind seine Tangenten imaginär und folglich ist das zweideutige Büschel reell. Mit anderen Worten: es ist in diesem Falle jedem Doppelpunktsstrahle ein reelles Strahlenpaar zugeordnet oder, von jedem Punkte der Curve lassen sich an dieselbe zwei reelle Tangenten ziehen.

„Hat eine Curve dritter Ordnung einen isolirten Doppelpunkt, so gehen von jedem ihrer Punkte zwei reelle Tangenten an dieselbe."

Es zeigen also alle Curvenpunkte ein gleiches Verhalten in dieser Beziehung.

Ist dagegen der Doppelpunkt ein eigentlicher, so sind dessen Tangenten reell und desshalb das zweideutige Büschel complex. In diesem Falle gibt es Doppelpunktsstrahlen, denen reelle, und solche,

denen imaginäre Strahlenpaare zugeordnet sind. Bekanntlich wird das eindeutige Büschel durch die zwei reellen Verzweigungsstrahlen G_1, G_2 in zwei Partien getheilt, so zwar, dass jedem Strahle der einen ein reelles und jedem der anderen ein imaginäres Strahlenpaar entspricht.

Wir haben diese beiden Theile den „reellen" und den „imaginären" Theil des eindeutigen Büschels genannt. Demgemäss wird durch den Doppelpunkt die Curve C_4^3 in zwei Abtheilungen getheilt, so zwar, dass sich von jedem Punkte der einen an die Curve ein reelles Tangentenpaar und von jedem der anderen gar keine (zwei imaginäre) Tangenten ziehen lassen. Der erste Curventheil wird im reellen Theile des eindeutigen Büschels liegen, während sich der zweite im imaginären Theile dieses Büschels befindet. Man nennt den letzten Theil der Curve die „Schleife". In Fig. 5 (Taf. IV) ist A die Schleife und in Fig. 5a (Taf. IV) besteht die Schleife aus zwei getrennten Theilen A, A.

„Besitzt eine Curve dritter Ordnung einen eigentlichen Doppelpunkt, so wird sie durch diesen in zwei Theile zerlegt. Der eine Theil „die Schleife" enthält solche Punkte, von denen sich an die Curve keine reellen Tangenten ziehen lassen, während von jedem Punkte des anderen Theiles zwei reelle Tangenten an die Curve gehen."

Diese beiden Curventheile zeigen in Bezug auf das Tangentenziehen ein verschiedenes Verhalten. Eine Curve mit einem eigentlichen Doppelpunkte zeigt auch ein merkwürdiges Verhalten in Bezug auf ihre Schnittpunkte mit einer willkührlichen Geraden ihrer Ebene.

„Wenn eine Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte von einer Geraden ihrer Ebene in drei reellen Punkten geschnitten wird, so liegen von ihnen immer zweie oder gar keiner auf der Schleife. Schneidet die Gerade die Curve in einem einzigen reellen Punkte, so kann dieser nie der Schleife angehören."

Legt man nämlich durch einen Punkt s der Curve, welcher nicht der Schleife angehört, einzelne Gerade, welche die Curve in je zwei weiteren Punkten schneiden, und verbindet man die so erhaltenen Punktepaare mit dem Scheitel durch Strahlenpaare, so erhält man eine quadratische Involution, deren Doppelstrahlen reell sein müssen, weil sich von s nach Annahme an die Curve ein reelles Tangentenpaar ziehen lässt. Die einzelnen Strahlenpaare müssen sich der Realität der Doppelstrahlen wegen ganz ein- oder ganz ausschliessen, oder mit anderen Worten es dürfen sich die von den Strahlenpaaren gebildeten Winkelflächen nicht überschlagen. Nun gehören nach Früherem die beiden Doppelpunktstangenten G_1, G_2 mit zu dieser Involution

als ein Strahlenpaar. Wenn man also durch s irgend einen Strahl A legt, welcher C_4^3 in s_1 und s_2 schneidet, so müssen die Strahlen $\overline{\delta s_1}$ und $\overline{\delta s_2}$ beide in der einen oder anderen, von den Doppelpunktstangenten gebildeten Winkelflächen liegen. Also müssen s_1 und s_2 entweder beide auf der Schleife, oder aber ausser der Schleife liegen. Gehört der Punkt s der Schleife an, dann findet das genau Verkehrte statt; dann sind die Doppelstrahlen imaginär und es müssen sich die Winkelflächen je zweier Strahlenpaare überschlagen. Daraus folgt, dass wenn einer von den Punkten s_1, s_2 auf der Schleife liegt, der andere ausserhalb derselben liegen müsse. Aber es wird immer einer mit s gleichzeitig auf der Schleife liegen. Von den drei Punkten $s s_1 s_2$ müssen also immer zweie oder gar keiner auf der Schleife liegen, während im ersten Falle der dritte dem anderen Curventheile angehört. Durch einen Punkt s, welcher auf der Schleife liegt, lässt sich, weil die von ihm an die Curve gehenden zwei Tangenten imaginär sind, keine Gerade legen, welche die Curve in zwei weiteren imaginären Punkten schnitte, woraus schliesslich folgt, dass, wenn eine Gerade die Curve in einem einzigen reellen Punkte schneidet, dieser der Schleife nicht angehören könne.

Nach der Definition des Curventheiles, welcher Schleife genannt wurde, folgt, dass kein Punkt desselben ein Tangentialpunkt sein könne, und dass der eine reelle Inflexionspunkt (welcher sein eigener Tangentialpunkt ist) auf dem anderen Curventheile liegen müsse.

Durch analoge Betrachtungen gelangt man zu einem ähnlichen Verhalten der Curven dritter Classe mit einer Doppeltangente. Wir wollen, die Untersuchungen dem Leser überlassend, die Resultate derselben im Folgenden zusammenstellen.

„Hat eine Curve dritter Classe eine isolirte (ideelle) Doppeltangente, so wird sie von jeder ihrer Tangenten in zwei reellen Punkten geschnitten."

„Besitzt eine Curve dritter Classe eine eigentliche Doppeltangente Fig. 6 (Taf. IV), so wird sie durch deren Berührungspunkte in zwei Theile zerlegt. Der eine Theil: „die Spitze" enthält solche Tangenten, welche die Curve in reellen Punktepaaren schneiden, während jede Tangente des anderen Theiles keinen reellen Schnittpunkt mit der Curve besitzt."

In Fig. 6 (Taf. IV) ist der von den Berührungspunkten g_1, g_2 der Doppeltangente $\varDelta$ begränzte Theil A der Curve C_3^4 deren Spitze.

„Wenn von einem Punkte an eine Curve dritter Classe mit einer eigentlichen Doppeltangente drei reelle Tangenten gehen, so gehören sie alle drei oder nur eine einzige der Spitze an. Wenn von dem Punkte nur eine reelle

Tangente an die Curve geht, so gehört diese immer der Spitze an.

Hat die Curve eine eigentliche Doppeltangente, so besitzt sie eine einzige reelle Rückkehrtangente, und diese muss selbstverständlich der Spitze der Curve angehören.

10. Wie wir zu Anfang schon erwähnt haben, entspricht jedem Punkte a einer Curve C_4^3 mit einem Doppelpunkte δ ein Strahl A, welcher diesen Punkt a mit dem Doppelpunkte δ verbindet; und umgekehrt entspricht jedem Doppelpunktsstrahle A jener Curvenpunkt a, welcher auf demselben liegt. Mit anderen Worten: „Die Curve C_4^3 liegt mit dem Strahlenbüschel δ perspectivisch.“ Diess ermöglicht es von dem Doppelverhältnisse von vier Punkten der Curve zu sprechen.

„Unter dem Doppelverhältnisse von vier Punkten der Curve verstehen wir das Doppelverhältniss der vier durch sie gehenden Doppelpunktsstrahlen.“

Ist das Doppelverhältniss von vier Punkten der Curve gleich der negativen Einheit, so nennen wir die Punkte harmonisch.

Statt des Doppelpunktes δ betrachten wir die beiden ihm unendlich nahen Punkte, welche auf den zwei durch δ gehenden Curvenzweigen liegen und denen die Doppelpunktstangenten G_1, G_2 als Doppelpunktsstrahlen entsprechen. Wir nennen diese zwei Punkte kurz die Nachbarpunkte des Doppelpunktes. Den im Art. 6. ausgesprochenen Satz kann man nun folgendermassen wiedergeben:

„Je zwei conjugirte Punkte (Pole) der Curve bilden mit den Nachbarpunkten des Doppelpunktes vier harmonische Punkte.“

Ebenso verstehen wir unter dem Doppelverhältniss von vier Tangenten einer Curve C_3^4 mit einer Doppeltangente Δ das Doppelverhältniss jener vier Punkte, welche die vier Tangenten auf der Doppeltangente bestimmen. Vier Tangenten, deren Doppelverhältniss $= -1$ ist, sind harmonisch. Auch hier wollen wir statt der Doppeltangente Δ die zwei Nachbartangenten betrachten, d. i. jene, welche auf der Doppeltangente Δ die Berührungspunkte der letzteren bestimmen.

„Je zwei conjugirte Tangenten der Curve bilden mit den Nachbartangenten der Doppeltangenten vier harmonische Tangenten.“

11. „Unter zwei projectivischen Punktsystemen $abc\ldots$ und $a'b'c'\ldots$ auf einer Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte verstehen wir zwei solche Systeme von sich entsprechenden Punkten, wo das Doppelverhältniss von je vier Punkten des einen Systems gleich ist demjenigen der vier entsprechenden Punkte des anderen Systems.“

Zwei projectivische Punktsysteme auf einer Curve C_4^3 sind durch

drei Paar entsprechender Punkte bestimmt. Die zwei, den beiden Punktsystemen entsprechenden Büschel von Doppelpunktsstrahlen sind projectivisch und besitzen zwei (reelle oder imaginäre) Doppelstrahlen, welche die Curve in den beiden Doppelpunkten der projectivischen Systeme schneiden.

„Zwei projectivische Punktsysteme auf einer Curve C_4^3 besitzen zwei Doppelpunkte.“

Die Vervollständigung solcher Punktsysteme wird mittelst der beiden entsprechenden Doppelpunktstrahlbüschel bewerkstelligt, welche Büschel auch gleichzeitig die zwei Doppelpunkte liefern. Wenn sich die Punkte der beiden Systeme vertauschungsfähig entsprechen, so ergibt sich eine „Punktinvolution“ auf der Curve C_4^3. Diese wird selbstverständlich aus dem Doppelpunkte durch eine Strahleninvolution projicirt, deren Doppelstrahlen auf der Curve die Doppelpunkte der Involution bestimmen.

Eine Punktinvolution auf einer Curve C_4^3 ist durch zwei Paar entsprechender Punkte bestimmt. Wir haben schon eine Art von Punktinvolution auf einer Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte kennen gelernt.

Wenn man nämlich durch einen festen Punkt t der Curve Strahlen zieht, so bestimmen diese auf der Curve Punktepaare einer Involution, da ja diese Punktepaare mit dem Doppelpunkte δ verbunden eine Strahleninvolution liefern. Die beiden Doppelpunkte dieser Involution sind die Berührungspunkte der zwei von t aus an die Curve gehenden Tangenten. Die auf solche Art erzeugte Involution ist von der besonderen Art, dass die Verbindungslinien entsprechender Punkte durch einen festen Punkt der Curve gehen. Wir wollen eine solche Involution als eine „centrale“ bezeichnen und den Punkt t der Curve, in welchem sich alle Verbindungslinien entsprechender Punkte schneiden, wollen wir das Involutionscentrum oder Centrum schlechtweg nennen.

Eine centrale Involution ist gegeben 1) durch ihr Centrum t oder 2) durch ein Paar a, a' entsprechender Punkte.

Kennt man nämlich erstlich das Centrum t, so kann man leicht zu jedem Punkte a der Curve den involutorisch entsprechenden Punkt a' bestimmen; man hat nur $\overline{ta}$ zu ziehen, so ist der dritte Schnittpunkt dieser Geraden mit der Curve der gesuchte Punkt a'.

Ist ein Punktepaar a, a' bekannt, so kann man wieder unmittelbar das Centrum t der Involution bestimmen; es ist diess nämlich der dritte Schnittpunkt der Geraden $\overline{aa'}$ mit dem Träger C_4^3.

Wenn wir eine Centralinvolution näher betrachten, so finden sich verschiedene Eigenheiten, welche sie vor einer allgemeinen Involution auszeichnen. Zunächst folgt aus der Definition einer centralen Invo-

lution, dass ihre Doppelpunkte ein Paar conjugirter Punkte der Curve sind und ferner, dass die beiden Nachbarpunkte des Doppelpunktes ein entsprechendes Punktepaar bilden. Das Erstere folgt daraus, dass die beiden vom Involutionscentrum an die Curve geführten Tangenten diese in den Doppelpunkten berühren, und letzteres folgt daraus, dass der durch t nach dem Doppelpunkte δ der Curve gehende Strahl diese in den zwei Nachbarpunkten des ersteren schneidet.

„Für alle Centralinvolutionen sind die zwei Nachbarpunkte des Doppelpunktes ein Paar entsprechender Punkte.“

Alle diese Involutionen haben also ein gemeinsames Punktepaar.

„Dem Centrum einer Centralinvolution entspricht dessen Tangentialpunkt.“

Denn der zugehörige Strahl ist die Tangente der Curve im Centrum und schneidet sie im Tangentialpunkte des Centrum.

Wir können nun sagen:

1) Eine Involution ist dann central, wenn sich die Verbindungslinien von zwei Paar entsprechender Punkte auf der Curve schneiden. (Dann schneiden sich die Verbindungslinien aller übrigen Punktepaare in demselben Punkte.)

2) Wenn die beiden Nachbarpunkte des Doppelpunktes ein Paar entsprechender Punkte sind.

3) Wenn die Doppelpunkte der Involution zwei conjugirte Punkte sind.

Wenn die Involution nicht central ist, so heisst sie eine allgemeine. Eine solche wird durch zwei sonst willkürlich gewählte Punktepaare aa', bb' bestimmt sein. Der Willkürlichkeit dieser Punktepaare wegen werden sich $\overline{aa'}$ und $\overline{bb'}$ in einem Punkte schneiden, welcher der Curve nicht angehört, was dann von allen weiteren Punktepaaren gilt.

Es werden jedoch die Verbindungslinien der einzelnen Punktepaare eine bestimmte Curve einhüllen, von welcher wir zeigen wollen, dass es ein Kegelschnitt ist. Um hierüber ins Reine zu kommen, untersuchen wir, wie vielmal eine solche Verbindungsgerade durch irgend einen Punkt t des Trägers hindurchgeht. Einmal erhält man eine solche Gerade, wenn man t mit dem ihm involutorisch entsprechenden Punkte t' verbindet. Ferner kann es aber auch vorkommen, dass die Verbindungslinie von zwei anderen sich entsprechenden Punkten durch t hindurchgeht. Diess kann, wie man im Vorhinein einsehen wird, höchstens einmal geschehen. Denn würde diess zweimal eintreffen, so wäre die vorliegende Involution eine centrale, was wir nicht voraussetzten. Es erübrigt nur noch zu zeigen, dass es wirklich einmal geschieht. Diess kann man am einfachsten in folgender Art darthun:

Die durch den auf der Curve betrachteten Punkt t gehenden Strahlen bestimmen auf ihr eine centrale Involution, welche mit der gegebenen immer ein gemeinschaftliches Punktepaar haben wird. Es geht also durch t ein Strahl, welcher die Curve $C_4{}^3$ in einem Punktepaar der gegebenen Involution schneidet. Im Ganzen gehen sonach durch jeden Punkt der Curve zwei Verbindungslinien entsprechender Punkte und daher ist die Enveloppe solcher Verbindungslinien wirklich ein Kegelschnitt, woraus weiter folgt, dass durch jeden beliebigen Punkt der Ebene zwei und nur zwei solcher Verbindungsstrahlen gehen.

„Verbindet man die Paare entsprechender Punkte einer Punktinvolution auf einer Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte durch Strahlen, so umhüllen diese einen Kegelschnitt."

Wir wollen diesen Kegelschnitt als den „Involutionskegelschnitt" bezeichnen.

Wenn auf der Curve $C_4{}^3$ zwei projectivische Punktsysteme befindlich sind, und man verbindet die einander entsprechenden Punkte durch Gerade, so umhüllen diese eine Curve vierter Classe. Denn durch jeden Punkt der Curve $C_4{}^3$ gehen vier und nur vier ihrer Tangenten. Hat man nämlich einen bestimmten Punkt t des Trägers ins Auge gefasst, so entsprechen ihm, je nachdem er zu einem oder dem anderen Punktsystem gezählt wird, zwei verschiedne Punkte, was zwei Tangenten der Enveloppe liefert. Ferner besitzt die centrale Involution, deren Centrum t ist, im Allgemeinen mit den projectivischen Punktsystemen zwei gemeinsame Punktepaare, was wieder zwei Tangenten der Enveloppe liefert. Ausser den so gefundenen Tangenten kann es keine weiteren geben, wesshalb die Enveloppe wirklich von der vierten Classe ist.

12. Unter zwei projectivischen Tangentensystemen einer Curve $C_3{}^4$ dritter Classe mit einer Doppeltangente verstehen wir zwei solche Systeme von sich entsprechenden Tangenten, wo zwischen je vier Paaren Doppelverhältnissgleichheit herrscht. Zwei solche Systeme werden durch drei Paar entsprechender Tangenten fixirt sein und werden zwei (reelle oder imaginäre) Doppelelemente besitzen.

Entsprechen sich die Tangenten der beiden Systeme vertauschungsfähig, so haben wir es mit einer Tangenteninvolution zu thun, welche im Allgemeinen durch zwei Elementenpaare bestimmt sein wird.

Eine besondere Art der Tangeninvolution und zwar die duale zu der centralen Punktinvolution auf einer $C_4{}^3$ ist jene, wo sich entsprechende Tangenten auf einer festen Tangente T des Trägers schneiden. Eine solche Involution wollen wir als eine Involution mit geradem Durchschnitt bezeichnen und diesen Durchschnitt T die Involutionsaxe nennen.

Durch ähnliche Betrachtungen, wie sie im vorigen Artikel geführt wurden, gelangt man zu folgenden, solche Involutionen betreffenden Sätzen:

„Für alle Involutionen mit geradem Durchschnitt sind die zwei Nachbartangenten der Doppeltangente ein Paar entsprechender Tangenten.“

„Der Axe der Involution entspricht die von ihrem Berührungspunkte an den Träger gehende Tangente.“

„Eine Tangenteninvolution mit geradem Durchschnitte besitzt immer zwei conjugirte Tangenten zu Doppeltangenten.“

Eine Tangenteninvolution besitzt dann und nur dann einen geraden Durchschnitt, wenn:

1) sich zwei Paar entsprechender Tangenten auf einer weiteren Curventangente schneiden,

2) wenn die beiden Nachbartangenten der Doppeltangente ein Paar entsprechender Tangenten sind,

3) wenn die Doppeltangenten der Involution zwei conjugirte Curventangenten sind.

Jede andere Involution heisst eine allgemeine. Während das Erzeugniss, d. h. der Ort des Schnittpunktes entsprechender Tangentenpaare bei einer Involution mit geradem Durchschnitt eine Gerade, nämlich die Axe der Involution ist, ist das Erzeugniss einer allgemeinen Involution ein Kegelschnitt.

Zwei projectivische Tangentensysteme erzeugen eine Curve 4ter Ordnung.

„Der Ort des Schnittpunktes der einzelnen Tangentenpaare einer quadratischen Tangenteninvolution auf einer Curve dritter Classe mit einer Doppeltangente ist ein Kegelschnitt — der Involutionskegelschnitt.“

„Der Ort des Durchschnittes entsprechender Tangenten zweier projectivischen Tangentensysteme auf einer solchen Curve ist eine Linie vierter Ordnung.“

13. Die Curven dritter Ordnung und Classe, deren Zeichen C_3^3 ist, können, wie schon im 1. Art. erwähnt wurde, auf doppelte Art entstehen. Erstens aus den Curven dritter Ordnung vierter Classe dadurch, dass die Tangenten des Doppelpunktes zusammenfallen und zweitens aus den Curven dritter Classe vierter Ordnung dadurch, dass die Berührungspunkte der Doppeltangente zusammenfallen.

Wir wollen nur die erste Entstehungsart etwas näher betrachten, da die zweite nur das Reciproke derselben ist.

Aus dem über die Curven C_4^3 mit einem Doppelpunkte Gesagten heben wir das hervor, dass jedem Punkte einer solchen eine centrale

Involution entspricht, deren Centrum eben der betrachtete Punkt ist. Jede solche Centralinvolution projicirt sich aus dem Doppelpunkte durch eine quadratische Strahleninvolution, deren Doppelstrahlen die Curve C_4^3 in den Berührungspunkten der beiden vom Centrum der Involution an die Curve gezogenen Tangenten schneiden.

Geht die Curve C_4^3 dadurch in eine Curve C_3^3 über, dass der Doppelpunkt zu einer Spitze wird, so ist dann die Spitzentangente ein Doppelstrahl der betrachteten Involution.

Gingen also von einem Punkte t einer Curve C_4^3 an dieselbe zwei Tangenten, so wird bei einer Curve C_3^3 nur eine eigentliche Tangente auftreten, indem die zweite durch die Verbindungslinie des Punktes t mit der Curvenspitze ersetzt wird.

Die Curve ist also dann wirklich von der dritten Classe.

Gehen wir nun zu den beiden an der Spitze einer C_3^3 entstehenden ein-zweideutigen Strahlenbüscheln, wie solche in Art. 7. betrachtet wurden, über. Die Doppelstrahlen des zweideutigen Büschels waren die Tangenten des Doppelpunktes, welche sonach hier zusammenfallen. Dieses Zusammenfallen der Doppelstrahlen des zweideutigen Büschels macht (siehe Art. 15. und 16. des 1. Theiles), dass die beiden Büschel nicht einzweideutig, sondern ein-eindeutig, d. h. projectivisch werden.

Diess kann aber schon a priori eingesehen werden.

Denn jedem Doppelpunkts- (oder hier eigentlich Spitzen-) strahle entspricht ein einziger zugeordneter Strahl. Ist nämlich s die Spitze der Curve C_3^3 und T ein durch s gehender Strahl, welcher C_3^3 in t schneidet, und zieht man von t an C_3^3 die eine (immer reelle) Tangente ϑ, welche C_3^3 in t' berührt, so entspricht der von s nach t' gehende Strahl T' projectivisch dem Strahle T. Es wird also auch t' projectivisch dem t entsprechen. In dieser Art erhalten wir auf der Curve zwei merkwürdige projectivische Punktsysteme, so zwar, dass jedem Punkte der Curve sein Tangentialpunkt entspricht:

„Bei einer Curve dritter Ordnung, dritter Classe bilden die einzelnen Punkte mit den ihnen entsprechenden Tangentialpunkten zwei projectivische Punktsysteme."

Die Doppelpunkte dieser Systeme sind leicht zu finden. Erstens ist es der eine Inflexionspunkt und zweitens die Spitze s. In der That sind diese beiden Punkte ihre eigenen Tangentialpunkte.

Gleichzeitig haben wir damit einen einfachen Beweis, dass eine Curve dritter Ordnung und Classe nur einen einzigen Inflexionspunkt haben könne. Lässt man die Curve C_3^3 aus einer Curve vierter Ordnung dritter Classe (C_3^4) dadurch entstehen, dass die Berührungspunkte der Doppeltangente zusammenfallen, d. h. dass die Doppeltangente zu einer Inflexionstangente wird, so gelangt man zu den reciproken Eigenschaften der Curve C_3^3.

Diese Eigenschaften drücken sich dann kurz in folgendem Satze aus: „Bei einer Curve dritter Ordnung und Classe bilden die einzelnen Tangenten mit den in ihren Schnittpunkten mit der Curve an diese gezogenen Tangenten zwei projectivische Tangentensysteme.“

Die Doppeltangenten dieser Systeme sind offenbar: 1) die Inflexionstangente und 2) die Spitzentangente.

Construction der Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte dritter Classe, mit einer Doppeltangente und jener der dritten Ordnung und Classe.

14. Die Construction einer von den oben genannten Curven ist nichts Neues und bietet vom theoretischen Gesichtspunkte aus gar keine Schwierigkeiten. Man kann sich, wenn eine solche Curve ganz allgemein gegeben ist, immer ein Kegelschnittsbüschel und ein ihm projectivisches Strahlenbüschel oder aber eine Kegelschnittsreihe und eine ihr projectivische gerade Punktreihe herstellen, deren Erzeugniss die betrachtete Curve ist.[1])

Die Erzeugung der genannten Curven durch Kegelschnittsbüschel und Kegelschnittsreihen wird jedoch dann mit Schwierigkeiten verbunden sein, wenn unter den gegebenen Elementen sich auch singuläre Elemente befinden; also etwa Inflexionspunkte, Spitzen.

Die constructive Erzeugung der Curven C_4^3, C_3^4 und C_3^3 mittelst einzweideutiger Elementargebilde ist dagegen in allen noch so speziellen Fällen anwendbar, wenn nur keine imaginären Punkte- oder Tangentenpaare unter den Bestimmungsstücken vorkommen. Das Letztere wollen wir auch hinfür immer voraussetzen.

15. „Von einer Curve C_4^3 ist der Doppelpunkt δ und sechs weitere Punkte: 1, 2, 3, 4, 5, 6, gegeben, man soll die Curve construiren.“ Fig. 7. (Taf. IV.)

Zunächst ist klar, dass die gegebenen Stücke die Curve vollkommen fixiren. Denn der Doppelpunkt δ gilt für drei Bedingungen, was mit den sechs weiteren Punkten neun Bedingungen ausmacht. Um nun die Curve wirklich punktweise herzustellen, nehmen wir δ und einen von den sechs Punkten, etwa den Punkt 6 zu Scheiteln zweier Büschel, deren Strahlen durch die fünf übrigen Punkte hindurchgehen. Wir wollen die Strahlen $\overline{61}$, $\overline{62}$, $\overline{63}$, $\overline{64}$ und $\overline{65}$ kurz mit A, B, C, D, E und die Strahlen $\overline{\delta 1}$, $\overline{\delta 2}$, $\overline{\delta 3}$, $\overline{\delta 4}$, $\overline{\delta 5}$ kurz mit A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 bezeichnen. Diese Strahlen lassen wir einander nun so entsprechen, dass

[1]) Vergleiche in dieser Beziehung die Methode von Chasles zur Construction der Curven dritter Ordnung und jener der dritten Classe. Es wird dem Leser nicht schwer fallen die allgemeine Methode den besonderen Fällen anzupassen, in denen eine Curve dritter Ordnung einen Doppelpunkt und jene der dritten Classe eine Doppeltangente besitzt.

A, B, C, D, E das eindeutige und A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 das ihm entsprechende zweideutige Büschel ist. Diese beiden Büschel δ und 6 sind durch die fünf Strahlenpaare AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, EE_1 vollkommen bestimmt und können nach Art. 22. des 1. Theiles vervollständigt werden. Je zwei entsprechenden Strahlen der beiden Büschel liefern dann durch ihren Schnitt einen Punkt der fraglichen Curve C_4^3.

Wie aus Art. 22. des 1. Theiles hervorgeht, lassen sich die beiden Büschel lineal vervollständigen und somit lässt sich unsere Curve C_4^3 lineal construiren, wie das ja auch ganz natürlich ist. Wir bestimmen den Directionskegelschnitt R bezüglich des Strahlenpaares AA_1 oder, was dasselbe ist, bezüglich des Punktes 1 der Curve C_4^3. Die (nach dem Satze von Brianchon) lineal construirten Tangenten dieses Kegelschnittes[1]) bestimmen auf den Strahlen AA_1 Punkte, welche mit den Büschelscheiteln 6, δ verbunden entsprechende Strahlen der beiden Büschel liefern, welche sich in Punkten der verlangten Curve C_4^3 schneiden. Der Directionskegelschnitt berührt den Strahl A als den Träger der vermittelnden zweideutigen Reihe und ferner die Linien $\overline{(AB_1)(A_1B)}$, $\overline{(AC_1)(A_1C)}$, $\overline{(AD_1)(A_1D)}$, $\overline{(AE_1)(A_1E)}$, durch welche 5 Tangenten er vollkommen bestimmt ist.

Der Strahl A, welcher die Curve C_4^3 im Punkte 6 und im Punkte 1 schneidet, wird sie noch einmal schneiden müssen, und das geschieht in dem Berührungspunkte α des Directionskegelschnittes mit der Tangente A. Denn der von δ nach α gehende Strahl A_2 ist der zweite dem Strahle A ausser A_1 entsprechende Strahl des zweideutigen Büschels. Wir haben damit die Lösung der folgenden Aufgabe:

„Eine Curve dritter Ordnung ist durch den Doppelpunkt und sechs weitere Punkte gegeben, man soll den dritten Schnittpunkt der Verbindungslinie zweier dieser Punkte mit der Curve auf lineale Weise finden.“

Denn dass sich der Berührungspunkt α mittelst des Lineals allein construiren lasse, braucht wohl gar nicht bemerkt zu werden.

Der Directionskegelschnitt R löst noch einige unsere Curve C_4^3 betreffenden Aufgaben auf.

Wie aus dem ersten Theile schon bekannt sein dürfte, entsprechen dem gemeinschaftlichen Strahle 6δ beider Büschel im zweideutigen Büschel die Tangenten, welche man von δ aus an den Kegelschnitt R ziehen kann, und sind diese zwei Strahlen gleichzeitig die Tangenten unserer Curve im Doppelpunkte.

„Die beiden vom Doppelpunkte δ aus an den Directions-

[1]) Wir können die diessbezüglichen Constructionen nicht hier nochmals durchführen, da sie im ersten Theile mit grosser Ausführlichkeit behandelt wurden und müssen den Leser dorthin verweisen.

kegelschnitt gezogenen Tangenten G_1, G_2, sind die Tangenten der Curve C_4^3 im Doppelpunkte."

Daraus ergibt sich gleich die dreifache Natur, welche der Doppelpunkt δ annehmen kann.

Liegt δ ausserhalb R, so sind G_1 und G_2 reell und δ ist dann ein eigentlicher Doppelpunkt. Liegt δ innerhalb R, so sind G_1 und G_2 imaginär und δ ist ein isolirter Doppelpunkt. Wenn schliesslich δ auf der Peripherie von R liegt, so fällt G_1 und G_2 zusammen und δ wird zu einer Spitze, oder zu einem Rückkehrpunkte.

„Der Doppelpunkt δ unserer Curve C_4^3 ist ein eigentlicher oder isolirter Doppelpunkt oder aber ein Rückkehrpunkt, je nachdem er ausserhalb, innerhalb oder aber auf dem Directionskegelschnitte selbst liegt."

Bei einer Curve dritter Ordnung mit einer Spitze geht also jeder Directionskegelschnitt durch die Spitze hindurch.

Von dem Punkte 6 der Curve, welchen wir zum Scheitel des eindeutigen Büschels gewählt haben, geht an den Kegelschnitt R ausser der Tangente A noch eine zweite Tangente t_6, welche dem gemeinsamen Strahle $\delta 6$ beider Büschel im eindeutigen Büschel entspricht. Diese Tangente ist zugleich die Tangente unserer Curve im Punkte 6. (Vergleiche Art. 22. des ersten Theiles.)

„Die Tangente der Curve im Scheitel des eindeutigen Büschels ist die von diesem an den Directionskegeschnitt gehende Tangente."

Diese Tangente kann man mittelst des Lineales allein construiren und kann somit folgende, die Curve C_4^3 betreffende Aufgabe leicht lineal lösen:

„Von einer Curve dritter Ordnung ist der Doppelpunkt und sechs weitere Punkte gegeben, man soll die Tangente der Curve in einem dieser sechs Punkte construiren."

Man wird den betreffenden Punkt zum Scheitel des eindeutigen Büschels nehmen, von dem zugehörigen Directionskegelschnitte die bestimmenden fünf Tangenten zeichnen, von denen eine durch den Scheitel selbst geht, und wird dann (nach Brianchon) die zweite durch diesen Scheitel gehende Tangente lineal construiren, welches die gesuchte Gerade ist.

Um die Tangenten G_1, G_2 des Doppelpunktes zu finden, hat man eine quadratische Aufgabe zu lösen und wird jedenfalls des Cirkels bedürfen. Es wird sich dabei darum handeln, von δ aus an den durch fünf Tangenten gegebenen Kegelschnitt R die beiden Tangenten zu ziehen, welche sich als Doppelstrahlen zweier projectivischen Strahlenbüschel leicht construiren lassen.

Alle diese Aufgaben sind in Fig. 7 (Taf. IV) durchgeführt worden und es bedarf wohl diese Figur keiner weiteren Erläuterung.

Der Directionskegelschnitt R schneidet den Träger A_1 der eindeutigen Hülfsreihe in zwei Punkten, den Verzweigungspunkten, welche mit 6 verbunden die beiden Verzweigungsstrahlen des eindeutigen Büschels liefern. Diese Verzweigungsstrahlen Θ_1, Θ_2 sind jedoch bekanntlich nichts anderes, als die vom Scheitel 6 aus an die Curve C_4^3 gehenden zwei Tangenten, welche hiemit gefunden wären.

Zieht man in den Schnittpunkten von R und A_1 an R die Tangenten und verbindet deren Schnittpunkte auf A mit δ, so erhält man die Doppelstrahlen des zweideutigen Büschels, welche die ihnen resp. entsprechenden Verweigungsstrahlen in den Berührungspunkten ϑ_1, ϑ_2 des Letzteren mit der Curve schneiden. Wir haben hiermit folgende Aufgabe gelöst:

„Von einer Curve dritter Ordnung ist der Doppelpunkt und sechs weitere Punkte gegeben, man soll die beiden von einem der sechs Punkte an die Curve gehenden Tangenten und deren Berührungspunkte construiren.“

Man wird den betreffenden Punkt zum Scheitel des eindeutigen Büschels nehmen und mit ihm so verfahren, wie mit dem Punkte 6 in Fig. 7 (Taf. IV).

Wir werden gleich eine rationellere Auflösungsweise dieser Aufgabe kennen lernen.

Dem Doppelpunktsstrahle $\delta 6$ sind im Sinne des 7. Art. die beiden Strahlen $\delta\vartheta_1$, $\delta\vartheta_2$ zugeordnet und gehören, als ihm entsprechend, zu zwei ein-zweideutigen concentrischen Strahlenbüscheln, deren drei Doppelstrahlen die Curve C_4^3 in den drei Inflexionspunkten schneiden.

In Fig. 7 (Taf. IV) könnte man diese drei Doppelstrahlen und demgemäss auch die drei Inflexionspunkte der Curve sofort construiren. Die Doppelpunktstangenten G_1, G_2 sind nämlich, wie bekannt, sowohl die Verzweigungsstrahlen des eindeutigen als auch die Doppelstrahlen des zweideutigen Büschels; so zwar, dass dem G_1 als Verzweigungsstrahle der Strahl G_2 als Doppelstrahl entspricht und umgekehrt. Man hat somit, da dem $\overline{\delta 6}$ der Strahl $\delta\vartheta_1$ (oder $\delta\vartheta_2$) entspricht, fünf Strahlenpaare, wodurch die beiden Büschel bestimmt sind.

Ihre drei Doppelstrahlen I_1, I_2, I_3 (welche nach Art. 7. construirt werden können, (von welchen aber im Falle der Fig. 7 (Taf. IV) nur ein einziger reell ist) treffen die Curve C_4^3 in den drei Inflexionspunkten derselben.

Würde der Doppelpunkt δ innerhalb des Directionskegelschnittes R liegen, d. h. würde er ein isolirter Punkt sein, so liesse sich der angegebene Vorgang nicht direct befolgen, sondern man müsste zu drei Doppelpunktsstrahlen die zugeordneten Strahlenpaare in der

angegebenen Art construiren, und dann die drei Doppelstrahlen I_1, I_2, I_3 bestimmen, welche in diesem Falle sämmtlich reell werden. Im Vorhergehenden ist somit die Lösung der folgenden Aufgabe enthalten:

„Von einer Curve dritter Ordnung ist der Doppelpunkt und sechs weitere Punkte gegeben, man soll die drei Inflexionspunkte der Curve construiren.“

Wenn einmal die beiden concentrischen ein-zweideutigen Büschel, deren drei Doppelstrahlen die Inflexionspunkte liefern, fixirt sind, so kann man in einfacher Weise in irgend einem Punkte die Curventangente und ebenso die beiden von diesem Punkte an die Curve gehenden Tangenten construiren, ohne den betreffenden Punkt erst zum Scheitel des eindeutigen, die Curve erzeugenden Strahlenbüschels nehmen zu müssen.

Um zum Beispiel in einem Punkte m der Curve die Tangente zu construiren, wird man sich den Tangentialpunkt m' vom m construiren können. Zu dem Behufe braucht man nur δm zu ziehen, diesen Strahl zum zweideutigen der beiden concentrischen Büschel zu rechnen, und den entsprechenden Strahl des eindeutigen zu construiren, welcher die Curve in m' schneiden wird. Verbindet man nun m mit m', so erhält man die verlangte Tangente von m. Um den Schnittpunkt des dem eindeutigen Büschel zugehörigen Strahles $\delta m'$ mit der Curve zu finden, construirt man zu ihm in dem, die Curve erzeugenden eindeutigen Büschel 6 den entsprechenden Strahl, welcher $\delta m'$ in dem gesuchten Punkte m' schneidet.

Wenn man umgekehrt von einem Punkte m' der Curve aus an sie die beiden Tangenten ziehen wollte, so kann man sich zunächst deren Berührungspunkte m, m_1 construiren, indem man zum Strahle $\delta m'$ (als zum eindeutigen der beiden concentrischen Büschel gehörig) das entsprechende Strahlenpaar $\delta m, \delta m_1$ bestimmt, welches dann die Curve in dem Punktepaare m, m_1 schneidet. Verbindet man schliesslich m' mit m und m_1, so erhält man das von m' aus an die Curve gehende Tangentenpaar.

Schneidet man in Fig. 7 (Taf. IV) die beiden, die Curve $C_4{}^3$ erzeugenden Büschel δ und 6 mit einer Geraden T, so erhält man auf derselben zwei ein-zweideutige Punktreihen, welche drei Doppelpunkte besitzen, die man nach Art. 37. des 1. Theiles leicht bestimmen kann. Diese drei Doppelpunkte sind offenbar die drei Schnittpunkte der Geraden T mit der Curve $C_4{}^3$, da sich in ihnen entsprechende Strahlen beider Büschel schneiden. Damit wäre folgende Aufgabe gelöst:

„Von einer Curve dritter Ordnung ist der Doppelpunkt und sechs weitere Punkte gegeben, man soll die drei Schnittpunkte der Curve mit einer Geraden construiren, ohne die Curve zu zeichnen.“

Von den drei Schnittpunkten können zwei imaginär sein oder aber es sind alle drei reell. Fallen zwei zusammen, so ist die Gerade eine Tangente, und wenn alle drei zusammenfallen, so ist die Gerade eine Inflexions- oder Wendetangente.

Der letzte Fall tritt nur dreimal ein.

Die Frage nach den drei Assymptoten der Curve $C_4{}^3$ kommt zurück auf die Frage nach den drei Schnittpunkten u_1, u_2, u_3, derselben mit der unendlich weiten Geraden. Diese drei Schnittpunkte sind jedoch nichts anderes, als die drei Doppelpunkte der beiden einzweideutigen Reihen, welche die zwei Büschel 6 und δ auf den unendlich weiten Geraden bestimmen. Um die drei Doppelpunkte zu construiren, verschiebe man eines der zwei Büschel, z. B. das Büschel 6 parallel mit sich selbst bis in den Scheitel δ des zweiten. Auf diese Art erhält man zwei concentrische ein-zweideutige Strahlenbüschel, deren drei Doppelstrahlen U^1, U^2, U^3 die unendlich weite Gerade offenbar in denselben drei Punkten u_1, u_2, u_3 schneiden, wie unsere Curve $C_4{}^3$.

Die drei Doppelstrahlen U^1, U^2, U^3 geben somit die Assymptotenrichtungen an. Die Assymptoten selbst erhält man durch Construction der Curventangenten in den drei unendlich weiten Punkten u_1, u_2, u_3. Man kann diese Tangenten, d. i. die Curvenassymptoten entweder nach einer der beiden schon erläuterten Methoden oder aber nach einer anderen, bald zur Sprache kommenden construiren.

Die Curve $C_4{}^3$ kann in Bezug auf die unendlich weite Gerade ein verschiedenes Verhalten zeigen. Wir wollen die Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte in dieser Hinsicht eintheilen, und uns der von Seydewitz für Raumcurven gegebenen Bezeichnungsweise bedienen. Wir unterscheiden zunächst:

1) Die hyperbolische Curve $C_4{}^3$, welche die unendlich weite Gerade in drei reellen Punkten schneidet. Also u_1, u_2, u_3 sind hier sämmtlich reell und von einander verschieden.

2) Die elliptische Curve $C_4{}^3$ trifft die unendlich weite Gerade in einem reellen und zwei imaginären Punkten. (u_1 reell, u_2, u_3 imaginär.)

3) Die parabolisch-hyperbolische Curve $C_4{}^3$ schneidet die unendlich weite Gerade in einem und berührt sie in einem anderen reellen Punkte (u_1 fällt unendlich nahe zu u_2). Diese Curve hat eine eigentliche Assymptote, während die unendlich weite Gerade die beiden anderen Assymptoten vertritt.

4) Die parabolische Curve $C_4{}^3$ oskulirt die unendlich weite Gerade. Diese Gerade vertritt alle drei Assymptoten und ist eine Inflexionstangente der Curve.

Die hyperbolische Curvenart besitzt drei von einander gesonderte Zweige, welche in den unendlich weiten Curvenpunkten zusammenhängen.

Diese Curvenart kann eine besondere Natur dadurch annehmen, dass der Doppelpunkt unendlich weit fällt. Dann werden zwei Assymptoten (die Doppelpunktstangenten) parallel sein und wir nennen diese Curve eine hyperbolische Curve besonderer Art.

Auch bei den elliptischen Curven kann etwas Aehnliches eintreten, dann nämlich, wenn die Curve einen unendlich weiten aber isolirten Doppelpunkt besitzt. Sie hat in diesem Falle zwei imaginäre, parallele Assymptoten mit reeller Richtung. Wir nennen eine solche: eine elliptische Curve besonderer Art. Bei den parabolisch-hyperbolischen Curven kann insoweit eine bemerkenswerthe Spezialität eintreten, als die unendlich weite Gerade eine Doppelpunktstangente werden kann. Es soll auch diese Curvenart durch den Beisatz „besonderer Art“ unterschieden werden.

Aber auch die Assymptoten selbst können ein verschiedenes Verhalten zeigen. Entweder sie berühren die Curve in den unendlich weiten Punkten einfach, oder aber es ist eine oder es sind alle drei von ihnen gleichzeitig Wendetangenten der Curve. Es können sonach folgende drei Fälle eintreten:

1) Alle drei Assymptoten sind einfache Assymptoten.

2) Eine Assymptote ist eine Wendetangente — dann soll sie als Inflexionsassymptote bezeichnet werden.

3) Alle drei Assymptoten sind Inflexionsassymptoten.

Der Fall, dass nur zwei Assymptoten inflectorisch wären, kann nicht eintreten, da die drei Inflexionspunkte unserer Curve C_4^3 immer in einer und derselben Geraden liegen, so dass die Verbindungslinie zweier Inflexionspunkte die Curve im dritten Inflexionspunkte schneiden muss.

16. Bei der wirklichen Construction einer Curve C_4^3 mit einem Doppelpunkte wird es von besonderem Interesse sein, für alle oder wenigstens mehrere der nach Art. 15. construirten Punkte der Curve die Tangenten zu haben.

Nun wurde zwar im vorhergehenden Artikel eine Methode der Tangentenconstruction wohl angegeben, doch ist dieselbe desshalb nicht gut verwendbar, weil man den Punkt, dessen Tangente man construiren will, zum Scheitel eines eindeutigen, die Curve erzeugenden Büschels nehmen und dann den Directionskegelschnitt fixiren muss. Es sind dazu eine Menge von Vorbereitungsconstructionen nöthig, wesshalb die Methode durch eine andere jetzt anzugebende ersetzt werden mag.

Sei Fig. 8 (Taf. IV), δ der Doppelpunkt der Curve, 6 der Scheitel des ein für allemal festzuhaltenden eindeutigen Büschels, und 1 jener Punkt der Curve, bezüglich dessen der Directionskegelschnitt R bestimmt

wurde.[1]) Die zwei Strahlen $\overline{\delta 1}$ und $\overline{61}$ sind nun zwei entsprechende Strahlen der beiden, die Curve C_4^3 erzeugenden Büschel. Der Directionskegelschnitt R wird den Strahl $\overline{61}$ zur Tangente haben und jeder neue Punkt der Curve C_4^3 wird eine Tangente des Directionskegelschnittes liefern, so wie umgekehrt jeder Tangente des Directionskegelschnittes ein Punkt der Curve C_4^3 entspricht.

„Die Punkte der Curve C_4^3 und die ihnen entsprechenden Tangenten des Kegelschnittes R sind zwei projectivische Systeme."

So liefert der Punkt 2 der Curve C_4^3 die Tangente $\overline{bb_1}$ des Directionskegelschnittes, welche man erhält, wenn man 2 von 6 und δ aus auf $\overline{\delta 1}$ und $\overline{61}$ resp. projicirt und die erhaltenen Projectionen b und b_1 verbindet. Ebenso liefert der Punkt 3 die Tangente $\overline{cc_1}$ des Kegelschnittes R. Umgekehrt würden die Tangenten $\overline{bb_1}$, $\overline{cc_1}$ resp. die Curvenpunkte 2 und 3 liefern. Es ist aus der Figur sofort zu ersehen, dass die Punkte der Curve C_4^3 und die ihnen entsprechenden Tangenten des Directionskegelschnittes zwei projectivische Systeme bilden.

Denn bewegt sich der Punkt 2 längs der Curve C_4^3, so beschreibt $\overline{\delta 2}$ ein Strahlbüschel, welches perspectivisch zu der von c_1 beschriebenen Punktreihe ist. Diese Punktreihe liegt aber wieder mit der Tangentenschaar von R perspectivisch, also ist die Tangentenschaar von R mit dem Büschel, welches $\overline{\delta 2}$ beschreibt, projectivisch.

Zwei Tangenten von R liefern zwei Punkte von C_4^3, und somit werden zwei unendlich nahe Tangenten von R zwei unendlich nahe Punkte von C_4^3 liefern, oder was dasselbe ist, jeder Berührungspunkt einer Tangente von R wird die Tangente eines Punktes von C_4^3 liefern.

Behalten wir nun die beiden Punkte 2 und 3 etwas mehr im Augenmerke; die Gerade $\overline{23}$ kann man dadurch zu einer Curventangente machen, dass man den Punkt 3 längst dieser Geraden immer mehr und mehr und schliesslich unendlich nahe gegen den Punkt 2 rücken lässt. Die dem Punkte 3 entsprechende Tangente $\overline{cc_1}$ des Directionskegelschnittes R wird einen zweiten Kegelschnitt, den wir S nennen wollen, umhüllen. Denn wenn 3 längs der Geraden $\overline{23} = t_2$ fortrückt, so beschreiben die Strahlen $\overline{\delta 3}$ und $\overline{63}$ zwei perspectivische Strahlenbüschel und die beiden Punkte c, c_1 zwei projectivische Punktreihen auf $\overline{\delta 1}$ und $\overline{61}$, deren Directionsaxe die Gerade $\overline{23}$ ist. 6 und δ sind dabei ein Paar entsprechender Punkte. Die Gerade $\overline{cc_1}$ wird daher einen Kegelschnitt S umhüllen, welcher dem Dreiseit $\delta 16$ eingeschrieben ist, und welcher $\overline{\delta 1}$ und $\overline{61}$ in den zwei Punkten m, n berührt, in welchen diese Geraden von $\overline{23}$ resp. getroffen werden.

Jeder Lage von 3 entspricht eine Tangente von S und R und

[1]) Eigentlich bezüglich des Strahlenpaares $\overline{\delta 1}$, $\overline{61}$.

ein besonderer Directionskegelschnitt R. Die sämmtlichen Directionskegelschnitte, d. h. die sämmtlichen den einzelnen Lagen von 3 auf t_2 entsprechenden Kegelschnitte gehören einer Curvenreihe an, da sie vier feste Tangenten besitzen und die Tangente $\overline{cc_1}$ (welche auch dem Kegelschnitte S angehört) als variabel auftritt.

Rückt nun der Punkt 3 unendlich nahe zu 2, d. h. wird t_2 zur Tangente der Curve im Punkte 2, so rückt $\overline{cc_1}$ gegen $\overline{bb_1}$ und beide werden sich im Berührungspunkte von $\overline{bb_1}$ mit dem Directionskegelschnitte schneiden. Da jedoch $\overline{bb_1}$ und $\overline{cc_1}$ ebenfalls Tangenten des Kegelschnittes S sind, so werden für diese Grenzlage R und S die Tangente $\overline{bb_1}$ $(= cc_1)$ in demselben Punkte berühren. Diesen Berührungspunkt β können wir jedoch mittelst des Kegelschnittes S sehr leicht finden, indem wir folgenden allgemein bekannten Satz über Kegelschnitte zur Verwendung bringen:

„Ist ein Kegelschnitt einem Dreiseit eingeschrieben, so gehen die Verbindungslinien der drei Ecken mit den Berührungspunkten der gegenüberliegenden Seiten durch einen und denselben Punkt.“

Betrachten wir nämlich das dem Kegelschnitte S umschriebene Dreieck $1bb_1$, so wird dessen Seite $\overline{b1}$ in m, $\overline{b_1 1}$ in n und $\overline{bb_1}$ in dem gesuchten Punkte β berührt. Um also β zu finden, ziehe man $\overline{mb_1}$ und $\overline{nb}$ und verbinde den Schnittpunkt beider mit der Ecke 1, wodurch man eine Gerade erhält, welche bb_1 in dem gesuchten Punkte β schneidet.

„Wenn die Gerade t_2 die Curve C_4^3 im Punkte 2 berührt, so berührt der Directionskegelschnitt die dem Punkte 2 entsprechende Tangente im Punkte β.“

Wir haben dadurch zunächst eine Lösung für folgende Aufgabe gefunden:

„Von einer Curve C_4^3 dritter Ordnung ist der Doppelpunkt, fünf weitere Punkte und die Tangente in einem derselben gegeben, man soll die Curve construiren.“

Sei Fig. 9 (Taf. IV) δ der Doppelpunkt, 1, 2, 4, 5, 6 die fünf Punkte und t_2 die Tangente der Curve im Punkte 2. Nimmt man wieder einen von den Punkten, z. B. 6 zum Scheitel des eindeutigen Büschels, so erhält man von den beiden Büscheln 6 und δ die vier durch 1, 2, 4, 5 resp. gehenden Strahlenpaare AA_1, BB_1, DD_1, EE_1, also nicht so viele als zur Bestimmung der beiden Büschel nothwendig sind. Trotzdem lassen sich die Büschel dadurch vervollständigen, dass man mittelst der gegebenen Tangente t_2 den Directionskegelschnitt R der beiden Büschel fixirt.

Bestimmt man den Kegelschnitt R bezüglich des Strahlenpaares AA_1 (oder des Curvenpunktes 1), so erhält man sofort folgende vier Tangenten desselben: A, $\overline{(AB_1)(A_1B)}$, $\overline{(AD_1)(A_1D)}$, $\overline{(AE_1)(A_1E)}$.

Von der zweiten Tangente $\overline{(AB_1)(A_1B)}$, welche wir kurz mit b bezeichnen wollen, kann man nun nach dem vorhin Entwickelten den Berührungspunkt β construiren. Man findet ihn nämlich als Berührungspunkt jenes Kegelschnittes S, welcher dem Dreiseit AA_1b eingeschrieben ist und A und A_1 in deren Schnittpunkten mit t_2 berührt. (Es ist also t_2 die Polare von 1 bezüglich dieses Kegelschnittes S.) Man hat also nur $\overline{(A_1t_2)(Ab)}$ und $\overline{(A_1b)(At_2)}$ zu ziehen und deren Schnittpunkt mit 1 zu verbinden, wodurch man eine Gerade erhält, welche b in dem gesuchten Berührungspunkte β schneidet. Nun hat man vom Directionskegelschnitte R vier Tangenten und den Berührungspunkt einer derselben und kann somit beliebig viele andere Tangenten desselben construiren. Dadurch werden aber die beiden Büschel 6, δ vervollständigt und unsere Curve C_4^3 construirt. Da man sich so viele Punkte von C_4^3 verschaffen kann, als man eben will, so kann man auch alle bisher im allgemeinen Falle gelösten Aufgaben auch hier auflösen.

Diess mag hier ein für allemal gesagt sein, dass, sobald man die Mittel an der Hand hat, die Curve C_4^3 zu construiren, man alle Aufgaben, welche die eine oder die andere Bestimmungsart der Curve voraussetzen, auflösen kann.

Die Tangente t_2 des Punktes 2 tritt somit als Polare des Punktes 1 (bezüglich dessen der Directionskegelschnitt bestimmt wurde) in Bezug auf einen Kegelschnitt S auf, welcher dem Vierseit $\overline{6\delta}$, A, A_1, b [1]) eingeschrieben ist und die Seite b in demselben Punkte β berührt, wie der Directionskegelschnitt R. Wir werden also auch umgekehrt aus so viel gegebenen Stücken, als zur Fixirung des Directionskegelschnittes nöthig sind, die Tangente t_2 des Punktes 2 construiren können.

Die Figur 9 zeigt auf den ersten Blick folgenden einfachen Zusammenhang der ganzen Sache.

Die Curventangente t_2 schneidet nämlich die dem Punkte 2 entsprechende Tangente b des Directionskegelschnittes R in einem Punkte β', welcher harmonisch ist zu dem Berührungspunkte β von b in Bezug auf die durch das Strahlenpaar A, A_1 auf b bestimmte Strecke $\overline{pq}$. Würde man also zum Punkte β den vierten harmonischen Punkt β' construiren und mit 2 verbinden, so ist die erhaltene Verbindungslinie die Tangente t_2 der Curve im Punkte 2.

Diess gibt die Lösung folgender Aufgabe:

„Von einer Curve dritter Ordnung ist der Doppelpunkt und sechs weitere Punkte gegeben, man soll in

[1]) Der Kegelschnitt S entsteht als Enveloppe zweier projectivischer Reihen auf A und A_1, zu denen 6 und δ als ein Paar entsprechender Punkte gehören, wesshalb S auch die Gerade $\overline{6\delta}$ berührt.

einem dieser sechs Punkte die Curventangente construiren."

Man nehme Fig. 10 (Taf. IV) δ und 6 zu Scheiteln der beiden einzweideutigen Büschel, welche die Curve erzeugen sollen, und erhält nun den fünf Punkten 1 2 3 4 5 entsprechend fünf Strahlenpaare AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 und EE_1. Für den bezüglich eines der fünf Punkte, z. B. bezüglich 1 bestimmten Directionskegelschnitt R bekommt man die fünf Tangenten A, $\overline{(AB_1)(A_1B)}$, $\overline{(AC_1)(A_1C)}$, $\overline{(AD_1)(A_1D)}$, $\overline{(AE_1)(A_1E)}$, wodurch derselbe fixirt ist.

Um nun zu einem der Punkte 1, 2, 3, 4, 5, z. B. zum Punkte 2 die Tangente t_2 zu construiren, bestimme man sich (nach Brianchon) den Berührungspunkt β der diesem Punkte entsprechenden Tangente $\overline{(AB_1)(A_1B)}$ mit dem Directionskegelschnitte, und construire zu ihm den vierten harmonischen Punkt β' bezüglich der Strecke pq, welche das Strahlenpaar AA_1 auf der Tangente $\overline{(AB_1)(A_1B)}$ bestimmt.

Verbindet man nun 2 mit β', so ist die Verbindungslinie die gesuchte Tangente t_2 der Curve C_4^3 im Punkte 2. Dieselbe Aufgabe hätte man auch in anderer Art auflösen können. Man braucht nur den Punkt, dessen Tangente verlangt wird, zum Scheitel des eindeutigen Büschels zu nehmen und an den Directionskegelschnitt die zweite, von ihm ausgehende Tangente zu construiren.

Dass man in derselben näher auseinander gesetzten Art und Weise zu jedem construirten Curvenpunkte mit grösster Leichtigkeit sofort die Tangente zeichnen könne, braucht wohl insbesondere nicht erwähnt zu werden.

17. Wir wollen in diesem Artikel zeigen, in welcher Art man die Tangente der Curve C_4^3 in jenem Punkte construiren könne, in Bezug auf welchen der Directionskegelschnitt R bestimmt wurde. Diess war in allen bis jetzt betrachteten Fällen der Punkt 1.

Sei also Fig. 11 (Taf. IV) δ der Doppelpunkt und 6 der Scheitel des eindeutigen Büschels, sowie 1 der Punkt, bezüglich dessen der Directionskegelschnitt R bestimmt wurde. Wenn nun 2 den dem Punkte 1 unendlich nahen Punkt vorstellt, so liefert er die Tangente $\overline{bb_1}$ des Directionskegelschnittes R, welche man erhält, indem man 2 von 6 und δ auf $\overline{\delta 1}$ und $\overline{61}$ resp. in b und b_1 projicirt und dann die Punkte b und b_1 verbindet. Ist 2 dem Punkte 1 unendlich nahe, so ist $\overline{bb_1}$ die durch 1 (oder 2) an den Directionskegelschnitt gehende Tangente[1]) und $\overline{12} = t_1$ ist die Curventangente im Punkte 1.

Aus der Figur folgt jedoch sofort, dass beim Unendlichnaherücken von 1 und 2 die vier Strahlen $\overline{bb_1}$, t_1, $\overline{61}$ und $\overline{\delta 1}$ ein harmonisches

---

[1]) $\overline{61}$ ist die andere von 1 an R gehende Tangente.

Büschel bilden werden. Es folgt dies aus dem Vierecke $2\,b\,1\,b_1$. Somit der Satz:

„Die Curventangente in irgend einem Punkte theilt mit der, von diesem Punkte an den bezüglich desselben bestimmten Directionskegelschnitt gehenden, Tangente den Winkel des durch den Punkt gehenden Strahlenpaares der beiden die Curve erzeugenden Büschel harmonisch.“

In diesem Satze liegt gleichzeitig die Andeutung zur Construction der Tangente des Punktes 1. Man wird einfach von 1 an den Directionskegelschnitt die zweite Tangente (nach Brianchon) construiren und zu ihr bezüglich des Strahlenpaares A, A_1 den harmonischen Strahl t_1 bestimmen; dieses ist die gesuchte Tangente. Natürlich kann man auch umgekehrt, wenn die Tangente t_1 der Curve C_4^3 im Punkte 1 bekannt ist, die von 1 an R gehende zweite Tangente construiren. Man hat bloss zu t_1 den bezüglich AA_1 harmonischen Strahl zu construiren, welcher diese Tangente darstellt.

Diess gibt eine Auflösungsmethode für die schon zweimal gelöste Aufgabe:

„eine Curve C_4^3 aus dem Doppelpunkte und 5 weiteren Punkten nebst der Tangente eines derselben zu construiren.“

Wäre z. B. die Tangente t_1 des Punktes 1 gegeben, und man würde den Punkt 6 zum Scheitel des eindeutigen Büschels nehmen, so könnte man den Directionskegelschnitt R auch bezüglich des Punktes 1 bestimmen. Von dem Directionskegelschnitte erhielte man erstens die Tangente $\overline{61}$, ferner drei weitere Tangenten, welche den drei ausser 6 und 1 gegebenen Punkten entsprechen, und schliesslich die fünfte in der angegebenen Art mittelst t_1 und mittelst des Strahlenpaares $\overline{61}$, $\overline{\delta 1}$ construirte, durch den Punkt 1 gehende Tangente. Im ganzen also fünf Tangenten, wodurch der Kegelschnitt bestimmt erscheint.

18. In den vorhergehenden Betrachtungen sind die Mittel zur Construction der Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte niedergelegt, wenn unter den Bestimmungsstücken Tangenten vorkommen. Wir wenden uns daher, weil der Fall, wo eine Tangente gegeben ist, schon ausführlich behandelt wurde, zu der folgenden Aufgabe:

„Von einer Curve dritter Ordnung ist der Doppelpunkt, vier weitere Punkte und die Tangenten von zweien gegeben, man soll die Curve construiren.“

Sei Fig. 12 (Taf. IV) δ der Doppelpunkt und 1 2 3 4 die vier bekannten Punkte der Curve, sowie t_1 und t_2 die Tangenten der beiden Punkte 1 und 2.

Man kann nun einen verschiedenen Constructionsweg einschlagen:

1) Man nimmt einen der beiden Punkte 3, 4, z. B. den Punkt 4 zum Scheitel des eindeutigen Büchels und bestimmt den Directions-

kegelschnitt R bezüglich des zweiten Punktes 3; dann erhält man für den Kegelschnitt R drei Tangenten und die Berührungspunkte zweier derselben, welche mittelst der gegebenen Tangenten t_1, t_2 nach Art. 16. construirt werden. Dadurch ist der Directionskegelschnitt bestimmt und die Curve kann construirt werden.

In dieser Art ist auch die Construction der Curve in Fig. 12 (Taf. IV) durchgeführt worden und bedarf wohl diese Figur keiner weiteren Erläuterungen.

2) Die Curve könnte man ferner auch durch folgende Anordnung der Construction erhalten, deren Ausführung jedoch dem Leser überlassen bleiben möge, da wir überzeugt sind, dass er auf keinerlei Schwierigkeiten bei der Ausführung stossen werde.

Man nimmt einen der beiden Punkte 3, 4 zum Scheitel des eindeutigen Büschels und bestimmt den Directionskegelschnitt R bezüglich eines der beiden Punkte 1, 2. Man erhält in diesem Falle für R vier Tangenten und den Berührungspunkt einer derselben.

3) Man nimmt einen der beiden Punkte 1, 2 zum Scheitel des eindeutigen Büschels und bestimmt den Directionskegelschnitt bezüglich des Anderen. Hier erhält man für R abermals fünf Tangenten.

4) Man nimmt einen der Punkte 1, 2 zum Scheitel des eindeutigen Büschels und bestimmt den Directionskegelschnitt bezüglich eines der Punkte 3, 4, wodurch man für R vier Tangenten nebst dem Berührungspunkte einer erhält.

19. Ebenso einfach wie fast alle bisher behandelten Aufgaben wird die folgende gelöst werden können:

„Von einer Curve dritter Ordnung ist der Doppelpunkt, drei weitere Punkte und deren Tangenten gegeben, man soll die Curve construiren.“

In Fig. 13 (Taf. IV) ist δ der Doppelpunkt 1, 2, 3, die drei Curvenpunkte und t_1, t_2, t_3 deren Tangenten. Den einen der drei Punkte, z. B. 3 nehmen wir zum Scheitel des eindeutigen Büschels und bestimmen den Directionskegelschnitt R etwa in Bezug auf den Punkt 1. Von 3 und δ gehen nach 1 und 2 die Strahlenpaare AA_1, BB_1, wobei das erstere von dem letzteren in dem Punktepaare b_1, b resp. geschnitten wird. Von dem Directionskegelschnitte haben wir vor der Hand drei Tangenten; nämlich erstens A als den Träger der zweideutigen Hülfsreihe, $\overline{bb_1}$ als die dem Punkte 2 entsprechende Tangente und schliesslich t_3 als Curventangente des eindeutigen Büschelscheitels. Wir können jedoch leicht den Berührungspunkt β der Tangente $\overline{bb_1}$ und dann eine vierte Tangente von R construiren, wodurch dann dieser Kegelschnitt bestimmt ist. Zieht man nämlich die durch b und b_1 gehenden Diagonalen des von den vier Geraden A, A, t_2 und $\overline{bb_1}$ gebildeten Viereckes, und verbindet deren Schnittpunkt mit dem Punkte 1,

so schneidet die Verbindungslinie die Tangente $\overline{b b_1}$ in deren Berührungspunkte β mit dem Directionskegelschnitte R. Wenn man ferner zu dem Strahle t_1 (d. i. zu der Curventangente des Punktes 1) bezüglich des in 1 zusammenstossenden Strahlenpaares A, A_1 den conjugirt harmonischen Strahl t_1' bestimmt, so ist dieser (nach Bewiesenem) ebenfalls eine Tangente des Directionskegelschnittes.

Von dem letztgenannten Kegelschnitte besitzen wir nur vier Tangenten und den Berührungspunkt einer derselben und können somit denselben vervollständigen und dadurch die verlangte Curve construiren.

20. Die verschiedenen in den vorhergehenden Artikeln über Curven dritter Ordnung gelösten Aufgaben können durch eine spezielle Lage der gegebenen Elemente eine besondere Form erlangen; die Methode der Auflösung resp. Construction bleibt jedoch in jedem Falle auf die betreffenden Prinzipien gestützt und wird Jedermann, der mit diesen kekannt ist, gar keine Schwierigkeiten bereiten.

Unter den gegebenen Elementen setzen wir den Doppelpunkt δ ein für allemal voraus.

Es können nun folgende besondere Fälle eintreten, in welchen die Curve zu construiren, wir dem Leser selbst überlassen.

1) Die Curve ist gegeben durch δ, fünf Punkte und eine Assymptotenrichtung, oder vier Punkte und zwei Assymptotenrichtungen, oder drei Punkte und drei Assymptotenrichtungen.

2) Durch δ, eine Doppelpunktstangente und weitere fünf Punkte, oder beide Doppelpunktstangenten und vier Punkte.

3) Eine parabolisch hyperbolische Curve durch den Doppelpunkt, den unendlich weiten Berührungspunkt und vier weitere Punkte, oder soviel Bedingungen als diese vier Punkte ersetzen.

4) Eine Curve C_4^3 ist gegeben durch den Doppelpunkt, eine Assymptote und vier Punkte, oder durch zwei Assymptoten und zwei Punkte, oder durch drei Assymptoten.

Eine besondere Gruppe aller dieser Fälle würde dann entstehen, wenn der Doppelpunkt unendlich weit fiele, wobei dann auch eine seiner Tangenten zur unendlich weiten Geraden werden könnte.

Einige der genannten Spezialfälle constructiv durchzuführen ist wohl überflüssig, erstlich weil uns diess nichts Neues liefern würde und weil es demjenigen unserer Leser, welcher sich dafür interessiren sollte, keinerlei Schwierigkeiten bereiten kann.

21. Wir haben in den vorhergehenden Artikeln bereits alle Fälle der Bestimmungsart einer Curve C_4^3 dritter Ordnung, bei welchen Tangenten unter den Bestimmungsstücken sich befinden, durchgenommen.

Wir kommen nun zu den Fällen, in welchen auch Inflexionstangenten als bestimmende Elemente auftreten.

Unsere Curve C_4^3 besitzt, wie wir wissen, drei Inflexionspunkte i_1, i_2, i_3, welche dann insgesammt reell sind, wenn der Doppelpunkt δ ein isolirter ist, während zwei imaginär werden, wenn δ ein eigentlicher Doppelpunkt wird. Die Tangenten I_1, I_2, I_3 der Curve in den drei Inflexionspunkten sind die drei Inflexionstangenten, von welchen jede die Curve in drei unendlich nahen Punkten schneidet.

Da jede Inflexionstangente drei zusammenfallende einfache Tangenten vorstellt, so lässt sich von jedem Inflexionspunkte an die Curve nur mehr eine Tangente ziehen. Diese Bemerkung dient dazu, um festzustellen, in welcher Art am einfachsten ein Inflexionspunkt der Curve C_4^3 entsteht.

Von jedem Punkte t der Curve lassen sich an dieselbe bekanntlich zwei Tangenten T_1, T_2 ziehen, während die Tangente Θ der Curve im Punkte t für zwei weitere Tangenten gilt.

Aus dem Punkte t wird nun ein Inflexionspunkt, wenn eine von den beiden Tangenten T_1, T_2 mit der Tangente Θ zusammenfällt.

Nun denken wir uns die Curve C_4^3 durch zwei ein-zweideutige Büschel erzeugt, so zwar, dass der Scheitel t des eindeutigen Büschels ein Inflexionspunkt der Curve werden soll und wollen untersuchen, was für Bedingungen da erfüllt sein müssen.

Bestimmt man den Directionskegelschnitt R der beiden Büschel bezüglich irgend eines Punktes, z. B. 1 der Curve, so schneidet (nach Art. 15.) dieser Kegelschnitt den Strahl $\overline{\delta 1}$ in denselben zwei Punkten wie die beiden von t aus an C_4^3 gehenden Tangenten T_1, T_2. Nun ist ferner die von t an R gehende Tangente die Tangente Θ des Scheitels t. Soll nun Θ mit einer der Tangenten T_1, T_2 zusammenfallen, so ist nöthig und hinreichend, dass die Tangente Θ den Reductionskegelschnitt R in einem seiner Schnittpunkte mit dem Strahle $\overline{\delta 1}$ berühre. Dann wird der Scheitel t ein Inflexionspunkt der Curve C_4^3.

„Ist der Scheitel des eindeutigen, die Curve C_4^3 erzeugenden Büschels ein Inflexionspunkt der Curve, so berührt die Inflexionstangente den Directionskegeschnitt in demselben Punkte, in welchem er einmal von jenem Strahle des zweideutigen Büschels getroffen wird, welcher zu dem Strahlenpaare gehört, bezüglich dessen der Directionskegelschnitt genommen wurde.“

Wir können nun leicht folgende Aufgabe lösen:

„Von einer Curve dritter Ordnung ist der Doppelpunkt δ, ein Inflexionspunkt i_1 nebst dessen Tangente I_1 und weitere drei Punkte 1, 2, 3 gegeben, man soll die Curve construiren.“ Fig. 14 (Taf. IV.).

Man nehme den Inflexionspunkt i_1 zum Scheitel des eindeutigen Büschels und bestimme den Directionskegelschnitt R bezüglich eines

der drei übrigen Punkte, z. B. bezüglich 1. Von diesem Kegelschnitte erhält man zunächst drei Tangenten, nämlich: erstlich $\overline{i_1 1}$, ferner jedem der beiden Punkte 2 und 3 eine entsprechend, welche man in bekannter Weise findet; schliesslich muss der Directionskegelschnitt R auch die Inflexionstangente I_1 berühren und zwar in dem Punkte, wo sie von dem Strahle $\overline{\delta 1}$ geschnitten wird. Man kennt also vom Reductionskegelschnitte vier Tangenten und den Berührungspunkt einer derselben, wodurch er und hiemit auch die beiden, die Curve erzeugenden Büschel bestimmt sind. In der Fig. 14 (Taf. IV) ist die Construction der Curve durchgeführt und bedarf wohl keiner weiteren Erläuterung.

Ganz ebenso gestaltet sich die Lösung folgender Aufgabe:

„Von einer Curve dritter Ordnung ist der Doppelpunkt δ, ein Inflexionspunkt i_1 nebst dessen Tangente I_1, ferner zwei weitere Punkte 1, 2 nebst der Tangente t_1 des ersten derselben gegeben; man soll die Curve construiren."

Wieder wird man i_1 zum Scheitel des eindeutigen Büschels nehmen und den Reductionskegelschnitt entweder bezüglich des Punktes 1 oder des Punktes 2 bestimmen.

Im ersten Falle erhält man vom Reductionskegelschnitt abermals vier Tangenten nebst dem Berührungspunkte einer derselben, wogegen man im zweiten Falle drei Tangenten nebst den Berührungspunkten zweier derselben erhält; in beiden Fällen soviel, als zur Bestimmung des Directionskegelschnittes nothwendig ist.

Die constructive Ausführung dieser Aufgabe überlassen wir dem Leser.

22. Wir haben im vorhergehenden Artikel einen Inflexionspunkt dadurch entstehen lassen, dass wir die Curventangente eines Punktes mit einer der beiden von ihm an die Curve gehenden Tangenten zusammenfallen liessen. Wir können einen Inflexionspunkt resp. eine Inflexionstangente auch auf folgende Weise erzeugen. Denken wir uns nämlich in irgend einem Punkte t der Curve die Tangente ϑ gezogen, so wird diese die Curve noch in einem reellen Punkte t' schneiden; rückt nun der Punkt t' unendlich nahe zum Berührungspunkte t, so wird ϑ eine Inflexionstangente und der Berührungspunkt t ein Inflexionspunkt.

Sei nun Fig. 15 (Taf. V) δ der Doppelpunkt, 1 der Punkt, bezüglich dessen der Directionskegelschnitt genommen wurde, und 6 der Scheitel des eindeutigen Büschels; ferner t ein weiterer Punkt, ϑ dessen Tangente und t' der Schnittpunkt derselben mit der Curve. Projicirt man t von 6 und δ auf $\overline{\delta 1}$ und $\overline{61}$, so erhält man die beiden Punkte b, b_1, deren Verbindungslinie $\overline{b b_1}$ eine Tangente des Directionskegelschnittes R ist. Zur Bestimmung des Berührungspunktes β derselben

verwendeten wir am betreffenden Orte einen Hülfskegelschnitt S, welcher dem Dreiseit $6\delta 1$ eingeschrieben ist, und die Seiten $\overline{61}$, $\overline{\delta 1}$ in den zwei Punkten m und n berührt, in welchen sie von der Tangente ϑ geschnitten werden. Wir fanden, dass dieser Kegelschnitt S die Tangente $\overline{bb_1}$ in demselben Punkte β berühre, wie der Kegelschnitt R. Man erhält den Berührungspunkt β einfach als Schnitt von $\overline{bb_1}$ mit der Verbindungslinie von 1 mit dem Punkte (mb) (nb_1). Der Punkt t' der Curve liefert nun eine weitere Tangente des Directionskegelschnittes, nämlich die Verbindungslinie $\overline{cc_1}$ der Projectionen von t' aus δ und 6 auf $\overline{61}$ und $\overline{\delta 1}$. Nun kann aber der Kegelschnitt S als Enveloppe zweier projectivischen Punktreihen auf $\overline{61}$ und $\overline{\delta 1}$ betrachtet werden, für welche 6 und δ ein Paar entsprechender Punkte und ϑ die Directionsaxe ist. Daraus folgt, dass die Gerade $\overline{cc_1}$, weil sie zwei entsprechende Punkte der beiden Reihen verbindet, auch eine Tangente des Kegelschnittes S ist. Somit ist $\overline{cc_1}$ eine den beiden Kegelschnitten R und S gemeinschaftliche Tangente.

Nun kennen wir alle vier den beiden Kegelschnitten R und S gemeinschaftliche Tangenten. Es ist diess erstlich der Strahl $\overline{61}$, zweitens die doppelt zu zählende Tangente $\overline{bb_1}$, welche von beiden Kegelschnitten in dem nämlichen Punkte β berührt wird, und schliesslich die Tangente $\overline{cc_1}$. Sonst haben die beiden Kegelschnitte keine gemeinschaftlichen Tangenten.

Bewegt sich nun der Punkt t' längst der Tangente gegen den Berührungspunkt t derselben, so nähert sich die Tangente $\overline{cc_1}$, während sie eine gemeinschaftliche Tangente von R und S bleibt, immer mehr und mehr der Tangente $\overline{bb_1}$. Fällt schliesslich t' mit t zusammen, d. h. wird t ein Inflexionspunkt, so fällt auch $\overline{cc_1}$ mit $\overline{bb_1}$ zusammen, so dass dann in $\overline{bb_1}$ drei gemeinschaftliche Tangenten der beiden Kegelschnitte R und S vereinigt sind. Die zwei Kegelschnitte R und S oskuliren somit einfach in der Tangente $\overline{bb_1}$.

„Wenn der Punkt t ein Inflexionspunkt der Curve ist, welcher die Tangente ϑ besitzt, so oskulirt der Directionskegelschnitt R den Kegelschnitt S im Punkte β."

Damit haben wir ein Mittel zur Lösung der folgenden schon einmal gelösten Aufgabe erhalten:

„Von einer Curve dritter Ordnung ist der Doppelpunkt δ, ein Inflexionspunkt i_1 nebst dessen Tangente I_1 und drei weitere Punkte 1, 2, 3 gegeben, man soll die Curve construiren."

Sei in Fig. 16 (Taf. V) δ der Doppelpunkt, i_1 der Inflexionspunkt, I_1 dessen Tangente und 1, 2, 3 die drei weiteren Punkte. Wir nehmen nun einen von den letzteren, z. B. 3 zum Scheitel des eindeutigen Büschels und bestimmen den Directionskegelschnitt bezüglich eines

anderen dieser Punkte, z. B. bezüglich 1. Von dem Directionskegelschnitte erhalten wir zunächst nur drei Tangenten nebst dem Berührungspunkte einer derselben; nämlich die Tangenten $\overline{31}$, $\overline{cc_1}$ (dem Punkte 2 entsprechend), $\overline{bb_1}$ (dem Inflexionspunkte entsprechend) und den Berührungspunkt β der letzteren, welcher mittelst der Tangente I_1 des Inflexionspunktes in bekannter Weise construirt wird. Diess reicht zur Bestimmung des Directionskegelschnittes R nicht aus. Nun kennen wir aber einen Kegelschnitt S, welchen der Kegelschnitt R im Punkte β oskuliren soll. Von diesem Kegelschnitte R haben wir folgende Stücke: die Tangente $\overline{31}$ mit dem Berührungspunkte n (der Punkt n ist der Schnitt von $\overline{31}$ mit I_1), die Tangente $\overline{\delta 1}$ mit dem Berührungspunkte m $(m = (I_1, \overline{\delta 1}))$, die Tangente $\overline{bb_1}$ mit dem Berührungspunkte β. Dadurch ist der Kegelschnitt S vollkommen bestimmt. Um nun den Directionskegelschnitt R construiren zu können, benöthigen wir entweder noch eine Tangente desselben oder aber den Berührungspunkt einer der von ihm bekannten Tangenten. Wir wollen das Letztere benützen.

Zu dem Behufe betrachten wir den Directionskegelschnitt R als die Collinealverwandte des Kegelschnittes S, so zwar, dass die Oskulationstangente $\overline{bb_1}$ die Collineationsaxe wird; dann ist der Punkt b_1 als Schnitt der vierten gemeinschaftlichen Tangente beider Kegelschnitte mit der Collineationsaxe das Collineationscentrum. Der Tangente $\overline{cc_1}$ des Directionskegelschnittes R wird eine Tangente des Kegelschnittes S entsprechen, welche wir dadurch leicht bestimmen, dass wir von dem Schnittpunkte p von $\overline{cc_1}$ mit der Collineationsaxe $\overline{bb_1}$ an den Kegelschnitt S die Tangente τ ziehen; dieselbe kann lineal (nach Brianchon) construirt werden, man braucht nur $\overline{p1}$ mit $\overline{mb_1}$ zum Schnitte zu bringen und diesen mit n zu verbinden, welche Verbindungslinie auf $\overline{\delta 1}$ einen Punkt bestimmt, der mit p verbunden die Tangente τ liefert. Der Berührungspunkt dieser Tangente mit dem Kegelschnitte S ist leicht mittelst des Dreiseits τ, $\overline{61}$, $\overline{\delta 1}$ gefunden, da man die Berührungspunkte der beiden letzten Seiten kennt und folglich nur drei Linien zu ziehen braucht (von welchen eine bereits in der Figur ist), um den Berührungspunkt der Ersten zu erhalten. Projicirt man nun den Berührungspunkt der Tangente τ aus dem Collineationscentrum b_1 auf die Tangente $\overline{cc_1}$, so ist der erhaltene Punkt γ der Berührungspunkt dieser Tangente mit dem Directionskegelschnitte R.

Nun hat man vom Directionskegelschnitt R drei Tangenten nebst den Berührungspunkten zweier derselben, und kann somit beliebig viele neue Tangenten desselben und folglich auch unsere Curve construiren.

Dass man nach dieser Methode auch die zweite im Art. 21.

besprochene Aufgabe lösen könne, braucht wohl nicht besonders bemerkt zu werden.

23. Wir wollen in diesem Artikel eine dritte Methode kennen lernen, nach welcher Curven dritter Ordnung construirt werden können, wenn unter den Bestimmungsstücken sich ein Inflexionspunkt befindet. Diese Methode wird uns die Curve auch dann construiren lassen, wenn zwei Inflexionspunkte gegeben sind.

Wir wollen nämlich annehmen, dass wir unter zu Grundelegung irgend eines Curvenpunktes als Scheitel des eindeutigen Büschels den Directionskegelschnitt R bezüglich eines Inflexionspunktes bestimmen.

Sei in Fig. 17 (Taf. V) δ der Doppelpunkt, 6 der Scheitel des eindeutigen Büschels, ferner t der Punkt, bezüglich dessen der Directionskegelschnitt bestimmt wurde, ϑ die Tangente der Curve im Punkte t und 1 der Schnitt dieser Tangente mit der Curve. Der Punkt t liefert für den Directionskegelschnitt R eine Tangente, nämlich den Strahl $\overline{6t}$; die Curventangente ϑ liefert eine zweite Tangente ϑ' des Kegelschnittes R, d. i. den Strahl, welcher mit ϑ den Winkel $6t\delta$ harmonisch theilt. Projicirt man endlich den Punkt 1 der Curve aus 6 und δ auf δt und $6t$, so erhält man zwei Punkte a, a_1, welche mit einander verbunden eine weitere Tangente $\overline{aa_1}$ des Directionskegelschnittes R geben.

Vermöge des in der Figur auftretenden vollständigen Viereckes schneiden sich die drei Linien ϑ', $\overline{aa_1}$ und $\overline{6\delta}$ in einem und demselben Punkte τ'. Rückt man nun den Punkt 1 der Curve längs der Tangente ϑ gegen deren Berührungspunkt t, so beschreiben die beiden Punkte a, a_1 zwei perspectivische Punktreihen, wesshalb der Strahl $\overline{aa_1}$ beständig durch den Punkt τ' hindurchgehen muss. Nun sind $\overline{aa_1}$ und ϑ' zwei Tangenten des Directionskegelschnittes und τ' ist ihr beständiger Schnittpunkt. Fällt also 1 unendlich nahe zu t, d. h. wird ϑ eine Inflexionstangente im Punkte t, so werden $\overline{aa_1}$ und ϑ' ebenfalls unendlich nahe zu einander fallen, und folglich wird der Directionskegelschnitt die Tangente ϑ' im Punkte τ' berühren.

„Ist der Punkt, bezüglich dessen man den Directionskegelschnitt bestimmt, ein Inflexionspunkt, so berührt der Directionskegelschnitt jene Gerade, welche mit der Inflexionstangente den Winkel der durch den Inflexionspunkt gehenden zwei Büschelstrahlen harmonisch theilt, in jenem Punkte, wo sie von dem gemeinschaftlichen Strahle beider Büschel geschnitten wird.“

Soll nun eine Curve C_4^3 construirt werden, von welcher der Doppelpunkt δ_1 ein Inflexionspunkt i_1 mit seiner Tangente, und drei weitere Punkte 1, 2, 3 gegeben sind, so kann man den Directionskegelschnitt R auch bezüglich des Inflexionspunktes i_1 bestimmen. Nimmt man

z. B. 3 zum Scheitel des eindeutigen Büschels, so erhält man vom Directionskegelschnitte erstlich die Tangente $\overline{3i_1}$, dann die zwei den Punkten 1, 2 entsprechenden Tangenten, und schliesslich eine vierte Tangente, nämlich den zu I_1 bezüglich des Winkels $3i_1\delta$ harmonischen Strahl, welcher den Directionskegelschnitt in demselben Punkte berührt, in welchem er von dem Strahle $\overline{\delta 3}$ geschnitten wird.

Man besitzt nun vom Directionskegelschnitte vier Tangenten und den Berührungspunkt einer derselben, wodurch er vollkommen bestimmt ist. Ebenso einfach ist die Lösung, wenn statt der drei Punkte 1, 2, 3 zweie nebst der Tangente eines derselben gegeben wären.

24. „Von einer Curve dritter Ordnung ist der Doppelpunkt δ, zwei Inflexionspunkte i_1, i_2 und deren Tangenten I_1, I_2 gegeben, man soll die Curve construiren."

Zur Lösung dieser Aufgabe haben wir in früheren und im vorhergehenden Artikel die Mittel niedergelegt.

Ist Fig. 18 (Taf. V) δ der Doppelpunkt, i_1, i_2 die beiden Inflexionspunkte und I_1, I_2 deren Tangenten, so nehme man einen der ersteren, z. B. i_1 zum Scheitel des eindeutigen Büschels und bestimme den Directionskegelschnitt R bezüglich des zweiten Inflexionspunktes i_2.

Vom Directionskegelschnitt R erhält man in diesem Falle drei Tangenten nebst den Berührungspunkten zweier derselben. Diese Tangenten sind: 1) $\overline{i_1 i_2}$, 2) I_1 mit dem Schnittpunkte von $\overline{\delta i_2}$ als Berührungspunkt, 3) der zu I_2 bezüglich des Winkels $\delta i_2 i_1$ harmonische Strahl I_2' mit dem Schnittpunkte von $\overline{\delta i_1}$ als Berührungspunkt.

Durch diese Stücke ist der Kegelschnitt R bestimmt, und die Construction der Curve hat keine weiteren Schwierigkeiten.

Wenn es auch hier an Ort und Stelle wäre, von dem gegenseitigen Verhältniss aller drei Inflexionspunkte und von dem Verhalten des Doppelpunktes zu sprechen, so müssen wir doch einiges Andere vorausschicken, um dann diese Fälle leicht behandeln zu können.

25. Wir erzeugten jede Curve dritter Ordnung mittelst eines festen Kegelschnittes R (des Directionskegelschnittes) zweier festen Geraden, von denen eine eine Tangente von R ist, und mittelst zweier fester Punkte dieser Geraden, von denen der eine der Doppelpunkt der Curve wurde, während der auf der Tangente von R liegende nur ein einfacher Curvenpunkt ist. Jede Tangente des Directionskegelschnittes R schneidet die zwei festen Geraden in zwei Punkten, welche mit den zwei festen Punkten zwei Strahlen liefern, die sich in einem Punkte unserer Curve durchschneiden. Jeder Tangente von R entspricht ein Punkt der Curve und umgekehrt. Wir drückten dieses Verhältniss bereits früher in Form eines Satzes aus.

Sei also δ der Doppelpunkt, 2 und 1 zwei weitere Punkte der Curve C_4^3, von welchen wir den ersteren zum Scheitel des eindeutigen

Büschels genommen hätten, während der Directionskegelschnitt R bezüglich des letzteren Punktes 1 bestimmt worden wäre, Fig. 19 (Taf. V). Der Directionskegelschnitt, welcher in der Figur vollständig gezeichnet ist, berührt die Gerade $\overline{12}$ (und zwar in demselben Punkte, in welchem sie von C_4^3 zum drittenmale geschnitten wird).

Jeder Tangente ϑ von R entspricht ein Punkt t von C_4^3; die Tangente ϑ trifft nämlich das Strahlenpaar $\overline{\delta 1}$, $\overline{21}$ in dem Punktepaare μ, ν, welches mit 2 und δ verbunden ein Strahlenpaar $\overline{\delta \nu}$, $\overline{2 \mu}$ liefert, das sich in einem Punkte t von C_4^3 schneidet; umgekehrt entspricht jedem Punkte t von C_4^3 eine einzige Tangente ϑ von R.

Betrachten wir nun eine beliebige Gerade G der Ebene und verlangen, deren drei Schnittpunkte t_1, t_2, t_3 mit der Curve C_4^3 zu bestimmen. Sowie wir jedem Punkte t unserer Curve C_4^3 eine Tangente ϑ des Directionskegelschnittes entsprechen lassen, so können wir jedem Punkte p von G eine Gerade π in derselben Weise entsprechen lassen. Wir ziehen nämlich die zwei Strahlen $\overline{\delta p}$ und $\overline{2p}$, welche auf $\overline{\delta 1}$ und $\overline{21}$ zwei Punkte bestimmen, die mit einander verbunden eine Gerade π geben, welche wir dem Punkte p entsprechen lassen wollen. Es frägt sich nun, was die Enveloppe der Geraden π sei, wenn sich der Punkt p längst G fortbewegt.

Offenbar ein Kegelschnitt. Denn die Schnittpunkte von π mit $\overline{\delta 1}$ und $\overline{21}$ beschreiben auf diesen Geraden zwei projectivische Punktreihen, zu welchen δ und 2 als ein Paar entsprechender Punkte gehören, und für welche die Gerade G die Directionsaxe ist. Die Enveloppe von π ist somit ein Kegelschnitt S, welcher dem Dreieck 12δ eingeschrieben ist und die in 1 zusammenstossenden Seiten desselben in jenen Punkten m und n berührt, in welchen sie von der Geraden G getroffen werden. Die Gerade G ist somit nichts anderes, als die Polare des Punktes 1 in Bezug auf den Kegelschnitt S.

Die Gerade G spielt bezüglich des Kegelschnittes S dieselbe Rolle, wie die Curve C_4^3 bezüglich des Directionskegelschnittes R; denn die Curve C_4^3 entsteht aus R ganz ebenso wie G aus S.

Wir wollen den Kegelschnitt S als der Geraden G zugeordnet bezeichnen.

„Der einer Geraden zugeordnete Kegelschnitt ist dem Dreieck 12δ so eingeschrieben, dass die Gerade die Polare der Ecke 1 bezüglich des Kegelschnittes ist."

Jeder Tangente von S entspricht in derselben Art ein Punkt von G, wie jeder Tangente von R ein Punkt von C_4^3 entspricht. Den gemeinschaftlichen Tangenten von R und S werden demnach die gemeinschaftlichen Punkte von G und C_4^3 entsprechen. Die beiden Kegelschnitte S und R haben eine solche Lage, dass der Strahl $\overline{12}$ eine Tangente für beide ist; sie werden also ausser dieser noch drei

gemeinschaftliche Tangenten $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ aufweisen, aus welchen man sofort die drei Schnittpunkte t_1, t_2, t_3 der Geraden G mit der Curve C_4^3 ableiten kann.

„Die drei Schnittpunkte einer Geraden G mit der Curve C_4^3 entsprechen den drei (ausser $\overline{12}$ auftretenden) gemeinschaftlichen Tangenten des Directionskegelschnittes R mit dem der Geraden G zugeordneten Kegelschnitte S."

Damit ist eine neue Lösungsart der Aufgabe: „Die drei Schnittpunkte einer Geraden G mit der Curve C_4^3 zu finden", gegeben.

„Eine Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte ist gegeben, man soll die zwei Schnittpunkte einer Geraden G mit der Curve bestimmen, welche Gerade durch einen gegebenen Punkt der Curve geht."

Construirt man den der Geraden zugeordneten Kegelschnitt, so wird man zwei von seinen mit dem Directionskegelschnitt gemeinsamen Tangenten gegeben haben, und kann die beiden übrigen, ohne die Kegelschnitte zu zeichnen, mittelst Lineal und Cirkel construiren. Diesen beiden letzteren Tangenten entsprechen die gesuchten zwei Schnittpunkte.

„Eine Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte ist gegeben, man soll den dritten Schnittpunkt derselben mit einer Geraden construiren, wenn die zwei anderen Schnittpunkte bekannt sind."

Man wird in diesem Falle nur die vierte gemeinsame Tangente des Kegelschnittes R und S zu construiren haben, was eine lineale Aufgabe ist.

Aus dem in diesem Artikel Gesagten folgt, dass drei Punkten t_1, t_2, t_3 unserer Curve C_4^3, welche auf einer und derselben Geraden G liegen, drei Tangenten $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ des Directionskegelschnittes R entsprechen, welche mit den drei Seiten des Dreiecks 12δ einen und denselben Kegelschnitt S berühren. Und umgekehrt: wenn man in das Dreieck 12δ irgend einen Kegelschnitt S einbeschreibt, und seine drei weiteren mit R gemeinsamen Tangenten $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ bestimmt, so entsprechen diesen allemal drei Punkte t_1, t_2, t_3 der Curve C_4^3, welche längs einer Geraden liegen, nämlich längs der Polaren G von 1 bezüglich S.

26. Wenn die Gerade G, welche wir im vorigen Artikel in drei Punkten t_1, t_2, t_3 schneiden liessen, zu einer Tangente der Curve C_4^3 wird, so fallen zwei von den drei Schnittpunkten zusammen; es werden also auch zweie von den drei dem S und R gemeinschaftlichen Tangenten zusammenfallen müssen. In diesem Falle berühren sich die beiden Kegelschnitte R und S.

„**Jeder Tangente der Curve C_4^3 ist ein den Directionskegelschnitt berührender Kegelschnitt zugeordnet.**“

Auf diesen Satz haben wir eine Constructionsmethode der Tangente in irgend einem Punkte unserer Curve gegründet. (Siehe Art. 16.)

Mittelst des einer Tangente zugeordneten Kegelschnittes lässt sich mit Leichtigkeit folgende Aufgabe lösen:

„**Man soll den einem Punkte der Curve zugehörigen Tangentialpunkt construiren.**“

Man wird in dem gegebenen Punkte die Curventangente construiren und deren Schnittpunkt mit der Curve bestimmen. Ist δ Fig. 20 (Taf. V) der Doppelpunkt der Curve C_4^3, 2 der Scheitel des eindeutigen Büschels und 1 der Punkt, bezüglich dessen der Directionskegelschnitt bestimmt wurde, so möge R dieser Directionskegelschnitt sein. Will man nun zum Punkte t, welchem die Tangente ϑ des Directionskegelschnittes entspricht, den Tangentialpunkt t' finden, so ziehe man zunächst die Tangente T des Punktes t, welche man erhält, indem man zum Berührungspunkte τ von R und ϑ den bezüglich $\overline{mn}$ conjugirt harmonischen Punkt τ' mit t verbindet. Es handelt sich nun darum, den Schnittpunkt der Tangente T mit der Curve zu bestimmen. Der der Tangente T zugeordnete Kegelschnitt S berührt den Directionskegelschnitt R im Punkte τ und ist dem Dreieck 12δ eingeschrieben. Wir kennen somit drei von den vier den beiden Kegelschnitten R und S gemeinschaftlichen Tangenten und haben nun die vierte noch zu finden, welche uns den gesuchten Tangentialpunkt t' liefern wird. Wir benöthigen eigentlich nicht so sehr diese vierte Tangente selbst, als vielmehr deren Schnittpunkt mit $\overline{12}$, weil dieser mit δ verbunden einen Strahl gibt, welcher T in dem verlangten Punkte t' schneidet. Um den Schnittpunkt der vierten Tangente mit der Tangente $\overline{12}$ schnell und einfach zu erhalten, betrachten wir die beiden Kegelschnitte R und S als Collinealverwandte, so zwar, dass die doppelt zu zählende gemeinschaftliche Tangente ϑ die Collineationsaxe wird. Dann wird der Durchschnitt der vierten gemeinschaftlichen Tangente mit der Tangente $\overline{12}$ das Centrum der Collineation, welches man sehr leicht bestimmen kann. Zieht man nämlich von den zwei Punkten, in denen $\overline{\delta 1}$ und $\overline{\delta 2}$ die Collineationsaxe treffen, an R die beiden noch ziehbaren Tangenten, so schneiden sie sich in einem Punkte s, welcher mit δ und dem Collineationscentrum in gerader Linie liegt. Somit geht $\overline{\delta s}$ nach dem Collineationscentrum und schneidet die Tangente T in dem gesuchten Tangentialpunkte t' von t.

Es dürfte interessant sein, zu bemerken, dass der Ort des Punktes s ein Kegelschnitt Σ ist, welcher den Directionskegelschnitt R in zwei Punkten berührt, und zwar in denselben zwei Punkten, wo dieser die beiden Doppelpunktstangenten berührt. Diesen Kegelschnitt Σ kann

man auch zur Lösung verschiedener Aufgaben, in denen Tangentialpunkte vorkommen, verwenden; so z. B. in der im nächsten Artikel zu lösenden.

27. Wir haben schon im 17. Artikel eine Methode kennen gelernt, nach welcher man die beiden von einem Punkte unserer Curve C_4^3 an dieselbe gehenden Tangenten construiren kann. Diese Methode hat den Nachtheil, dass man den betreffenden Punkt zum Scheitel des eindeutigen Büschels nehmen muss, dessen Verzweigungsstrahlen die beiden Tangenten sind. Sollte man nach dieser Methode für mehrere Punkte die durch sie gehenden Tangentenpaare construiren, so hätte man ein und dieselbe ziemlich complicirte Construction durchzuführen. Wir haben auch schon eine Vereinfachung des Verfahrens kennen gelernt, welches sich auf die Verwendung der beiden concentrischen einzweideutigen Büschel von Doppelpunktsstrahlen, wie sie den Punkten und Tangentialpunkten entsprechen, stützt. Die bisherigen Errungenschaften setzen uns in Stand ein anderes, vielleicht eleganteres Verfahren bei der Lösung dieser Aufgabe anzuwenden. Es mögen δ, 1, 2, R in Fig. 21 (Taf. V) dieselbe Bedeutung wie in den beiden früheren Figuren behalten, und t der Curvenpunkt sein, welchem die Tangente ϑ des Directionskegelschnittes R entspricht, und durch welchen wir die beiden Tangenten an die Curve ziehen sollen.

Jede durch t gehende Gerade G trifft die Curve in zwei weiteren Punkten, welche wir construiren wollen. Einer solchen Geraden ist nämlich ein dem Dreieck 12δ eingeschriebener Kegelschnitt S zugeordnet, welcher auch ϑ berührt und für welchen die betreffende Gerade die Polare des Punktes 1 ist (siehe Art. 25.). Die beiden von uns verlangten, durch t gehenden Curventangenten gehören mit zu dem Systeme der Geraden G; und zwar stellen sie jene zwei Lagen derselben vor, in denen die beiden weiteren Schnittpunkte zusammenfallen. Die Schnittpunkte einer beliebigen Geraden G, welche durch t geht, entsprechen jedoch, wie wir wissen, den zwei, den beiden Kegelschnitten R und S gemeinschaftlichen Tangenten, welche ausser $\overline{12}$ und ϑ auftreten. Sollen die zwei Schnittpunkte zusammenfallen, so müssen es auch diese zwei gemeinsamen Tangenten thun, d. h. der Kegelschnitt S muss den Directionskegelschnitt berühren.

Es kömmt also nur darauf hinaus, die Gerade G so durch t zu legen, dass der ihr zugeordnete Kegelschnitt S den Kegelschnitt R berühre.

Nun bilden alle den einzelnen Lagen der durch t gehenden Geraden G zugeordneten Kegelschnitte eine Kegelschnittsreihe, d. h. ein System von Kegelschnitten, welche dieselben vier festen Geraden (die Träger der Reihe) berühren. Diese Träger der Reihe sind: $\overline{12}$, $\overline{2\delta}$, $\overline{\delta 1}$ und ϑ. Zwei davon, nämlich $\overline{12}$ und ϑ, sind gleichzeitig Tangenten

von R. Wir haben nun unter den Kegelschnitten dieser Reihe jene beiden auszusuchen, welche den Directionskegelschnitt R berühren. Jeder Kegelschnitt der Reihe bestimmt mit R zwei neue gemeinsame Tangenten, welche Tangentenpaare eine quadratische Involution bilden. Die Doppeltangenten ϑ_1, ϑ_2 dieser Involution gehören den beiden Kegelschnitten der Reihe an, welche R berühren, und es werden daher die zwei den Tangenten ϑ_1, ϑ_2 des Directionskegelschnittes entsprechenden Punkte t_1, t_2 schon die Berührungspunkte der beiden von t an C_4^3 gezogenen Tangenten, und somit die Linien $\overline{tt_1}$ und $\overline{tt_2}$ diese Tangenten selbst sein.

Es handelt sich somit nur um die Doppeltangenten ϑ_1, ϑ_2 der besagten Involution auf R. Dieselben erhalten wir am einfachsten dadurch, dass wir uns die Axe der Involution bestimmen. Der Doppelpunkt δ gehört mit dem Schnittpunkte von $\overline{12}$ und ϑ als Grenzfall zu der Curvenreihe und folglich bilden die beiden Doppelpunktstangenten ein Tangentenpaar der Involution, wesshalb δ ein Punkt der Involutionsaxe ist. Der Punkt 1 mit dem Schnittpunkte von $\overline{\delta 2}$ und ϑ bilden einen zweiten Grenzfall und somit die von ihnen an R resp. gezogenen Tangenten α, β ein zweites Tangentenpaar der Involution. Der Schnittpunkt a von α und β gehört also auch der Involutionsaxe an, welche durch die Verbindungslinie $\overline{a\delta}$ dargestellt wird. Diese Involutionsaxe schneidet den Directionskegelschnitt R in zwei Punkten τ_1, τ_2, deren zwei Tangenten ϑ_1, ϑ_2 die verlangten Doppeltangenten der Involution sind.

Hiemit wäre diese Aufgabe erledigt.

28. Wir haben nun noch, was das Tangentenziehen an die Curve C_4^3 anbelangt, die folgende Aufgabe zu lösen.

„Eine Curve dritter Ordnung ist durch den Doppelpunkt und sechs weitere Punkte (oder diesen aequivalente Bedingungen) gegeben, man soll die durch einen beliebigen Punkt der Ebene an sie gehenden vier Tangenten construiren."

Man erkennt sofort, dass die Aufgabe vom vierten Grade ist.

Sei Fig. 22 (Taf. V) δ der Doppelpunkt und 2 der Scheitel des eindeutigen Büschels, ferner 1 der Punkt, bezüglich dessen der Directionskegelschnitt bestimmt wurde und R dieser Kegelschnitt selbst; endlich sei P der Punkt, durch welchen wir an die Curve die vier Tangenten ziehen wollen. Jeder durch P gehenden Geraden G ist ein Kegelschnitt S zugeordnet, welcher mit R noch drei gemeinschaftliche Tangenten besitzt, welche die drei Schnittpunkte von G und C_4^3 liefern. Soll nun G eine Tangente der Curve C_4^3 werden, so müssen zwei von diesen drei Durchschnittspunkten zusammenfallen, somit auch

zwei von den drei R und S gemeinschaftlichen Tangenten. Der Kegelschnitt S muss den Kegelschnitt R berühren.

Die vier durch P gehenden Tangenten sind somit nichts anderes, als jene vier Strahlen, für welche der zugeordnete Kegelschnitt S den Directionskegelschnitt R berührt.

Unsere Aufgabe kommt also darauf hinaus, unter allen, den einzelnen Strahlen durch P zugeordneten Kegelschnitten jene zu bestimmen, welche den Directionskegelschnitt R berühren.

Zu dem Ende müssen wir alle diese Kegelschnitte etwas näher betrachten.

Das ganze System der Kegelschnitte S ist dadurch definirt, dass es dem Dreiseit 12δ eingeschrieben ist, so zwar, dass die Polare der Ecke 1 durch den festen Punkt P hindurchgeht. In der That berührt der einer Geraden G zugeordnete Kegelschnitt das Seitenpaar $\overline{21}$, $\overline{\delta 1}$ in dem Schnittpunktepaar desselben mit der betreffenden Geraden, welche also die Polare von 1 ist.

Es lässt sich von diesem Kegelschnittssysteme S nun leicht zeigen, dass jede beliebige Gerade nur von einem Kegelschnitte desselben berührt wird.

Denken wir uns nämlich irgend eine Gerade g und fragen wir, ob und wie viele Kegelschnitte es in unserem Systeme gebe, welche g berühren, so sehen wir, dass zunächst alle jene Kegelschnitte, welche dem Dreiseit 12δ eingeschrieben sind und g berühren, eine Kegelschnittsreihe bilden, in Bezug auf welche bekanntlich die Polaren des Punktes 1 durch einen festen Punkt p (eine Ecke des dem von den Trägern $\overline{12}$, $\overline{2\delta}$, $\overline{\delta 1}$ und g gebildeten Vierseit zugehörigen Diagonaldreiseits) hindurchgehen. Es wird also unter den Kegelschnitten dieser Reihe einen und nur einen einzigen geben, für welchen die Polare von 1 auch durch den Punkt P hindurchgeht, welcher somit zu unserem Systeme S gehört. Man braucht nur $\overline{pP}$ zu ziehen, welche Linie das Strahlenpaar $\overline{\delta 1}$, $\overline{21}$ in dessen Berührungspunkten mit diesem Kegelschnitte schneidet.

„Jede Gerade wird von einem Kegelschnitte des Systems S berührt, dasselbe ist somit eine Kegelschnittsreihe.“

Die drei Seiten des Dreiecks 12δ sind drei Träger dieser Kegelschnittsreihe, deren vierten Träger man leicht bestimmen kann. Projicirt man nämlich P von δ auf $\overline{12}$ und von 2 auf $\overline{1\delta}$, so erhält man zwei Punkte, deren Verbindungslinie M der vierte Träger der Kegelschnittsreihe S ist. In der That bildet diese Verbindungslinie mit dem Dreieck 12δ ein Vierseit, für welches P eine Diagonalecke ist, durch welche die Polaren des Punktes 1 bezüglich aller dem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte hindurchgehen müssen. Jeder Kegelschnitt S dieser Reihe liefert drei mit R gemeinschaftliche Tangenten, welche

Tangententrippel eine cubische Tangenteninvolution auf dem Kegelschnitte R bilden. Diese cubische Involution besitzt vier Doppeltangenten $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4$, welchen vier Punkte t_1, t_2, t_3, t_4 der Curve C_4^3 entsprechen. Diese vier Punkte sind dann die Berührungspunkte der von P aus an C_4^3 gehenden Tangenten und folglich sind $\overline{Pt_1}, \overline{Pt_2}, \overline{Pt_3}, \overline{Pt_4}$ diese Tangenten selbst.

Wir haben nur noch zu zeigen, wie man die vier Doppeltangenten der cubischen Involution bestimmen könne. [1])

Jede Involution ist durch zwei Elementengruppen bestimmt. Wir werden uns also zunächst zwei Gruppen entsprechender Tangenten unserer Tangenteninvolution und zwar dadurch herstellen, dass wir Grenzkegelschnitte unserer Kegelschnittsreihe S dazu benützen.

Zunächst betrachten wir den Schnittpunkt m von M mit $\overline{12}$ und δ als einen Grenzfall; von m geht an R die Tangente B_1 und von δ das Doppelpunktstangentenpaar B_2, B_3, welche drei Tangenten eine Elementengruppe B_1, B_2, B_3 der cubischen Involution bilden. Ferner betrachten wir den Schnitt n von M mit $\overline{\delta 1}$ und 2 als anderen Grenzfall. Von 2 geht an R die Tangente A_1 und von n das Tangentenpaar A_2, A_3. Das Tangententrippel A_1, A_2, A_3 bildet eine zweite Gruppe unserer cubischen Involution.

Durch die beiden Gruppen $A_1 A_2 A_3$ und $B_1 B_2 B_3$ ist die cubische Involution bestimmt. Die zwei Eckentrippel $a_1 a_2 a_3$ und $b_1 b_2 b_3$ der zwei Dreiseite $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$ liegen auf einem Kegelschnitte Σ, auf welchem die Eckentrippel aller anderen durch die einzelnen Tangentengruppen gebildeten Dreiseite sich befinden.

Dieser Kegelschnitt Σ, welchen wir den Involutionskegelschnitt nennen könnten, schneidet den Directionskegelschnitt R in vier Punkten $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$, und wenn man in diesen vier Punkten an R die Tangenten $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4$ resp. legt, so sind diess die vier Doppeltangenten der Involution, denen die Berührungspunkte t_1, t_2, t_3, t_4 der verlangten vier Tangenten entsprechen.

Die vier Schnittpunkte $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ und demgemäss auch die vier von P aus an die Curve C_4^3 gehenden Tangenten sind entweder gleichzeitig reell, oder imaginär; oder aber es sind zwei reell und zweie imaginär.

Ist der Doppelpunkt der Curve ein eigentlicher, so zerlegt sie die Ebene in drei Theile. Innerhalb der Schleife liegen solche Punkte, durch welche keine reellen Tangenten der Curve gehen; der andere Theil trennt solche Punkte, durch welche vier reelle Tangenten gehen,

---

[1]) Ich werde, wenn es meine Zeit und meine Verhältnisse erlauben, von den cubischen Involutionen Ausführliches zu sprechen in einer Theorie der ein-dreideutigen Gebilde Gelegenheit haben. Der Verf.

von solchen, durch welche nur zwei reelle Tangenten sich legen lassen.

Ist der Doppelpunkt ein isolirter, so gibt es nur solche Punkte, durch welche vier reelle oder zwei reelle Tangenten hindurchgehen.

Wir können auch sagen:

„Die Tangenten einer Curve mit isolirtem Doppelpunkte bedecken die ganze Ebene, während sie bei einer Curve mit eigentlichem Doppelpunkte die Schleife frei lassen.“

29. Wir sehen, dass jeder Geraden G ein Kegelschnitt S zugeordnet ist, dessen drei gemeinschaftlichen Tangenten ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 mit dem Directionskegelschnitte R die drei Schnittpunkte t_1, t_2, t_3 der Geraden mit der Curve C_4^3 entsprechen.

Einer Tangente der Curve C_4^3 ist ein Kegelschnitt zugeordnet, welcher den Directionskegelschnitt berührt.

Man erkennt sofort, dass einer Inflexionstangente ein solcher Kegelschnitt zugeordnet sein wird, welcher den Directionskegelschnitt oskulirt. Denn so wie die drei Schnittpunkte einer Inflexionstangente mit der Curve in einen einzigen Punkt zusammenfallen, so müssen auch die drei dem zugeordneten Kegelschnitte und dem Directionskegelschnitte gemeinschaftlichen Tangenten zusammenfallen, d. h. die beiden Kegelschnitte müssen sich oskuliren.

Um somit die Inflexionstangenten einer Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte zu bestimmen, hat man in dem Netze der Kegelschnitte S jene herauszufinden, welche den Directionskegelschnitt R oskuliren.

Wenn δ, 1, 2 und R dieselbe Bedeutung haben, wie in den vorhergehenden Figuren, so sind bekanntlich alle Kegelschnitte S dem Dreieck 12δ eingeschrieben, von welchem die Seite $\overline{12}$ zugleich eine Tangente des Directionskegelschnittes R ist.

Es wird somit drei Kegelschnitte S_1, S_2, S_3 geben, welche dem Dreieck 12δ eingeschrieben sind und den Kegelschnitt R oskuliren. (Man vergleiche in dieser Beziehung den 1. Satz von Steiner in Crelle Journal auf Seite 300 des 32. Bandes und die allgemeine Ausdrucksweise desselben durch August im 68. Bande auf Seite 238.)

Diese drei Kegelschnitte werden den Directionskegelschnitt R in den Tangenten T_1, T_2, T_3 oskuliren, welche man leicht als die drei Doppeltangenten zweier ein-zweideutigen Tangentensysteme auf R construiren kann.

Nimmt man nämlich irgend eine Tangente A von R an, so werden leicht zwei Kegelschnitte sich finden lassen, welche dem Dreieck 12δ eingeschrieben sind und A nebst R berühren. Die beiden Berührungstangenten A_1, A_2 kann man der Tangente A zuordnen. Dagegen gibt es immer nur einen einzigen Kegelschnitt, welcher dem

Dreieck 12δ eingeschrieben ist und R in einer bestimmten Tangente B_1 berührt. Dieser Kegelschnitt wird mit R noch eine Tangente B gemeinsam haben, welche man der Tangente B_1 zuordnen kann. In dieser Weise entstehen auf R zwei ein-zweideutige Tangentensysteme, deren drei Doppeltangenten offenbar jenen drei Kegelschnitten angehören, welche dem Dreieck 12δ eingeschrieben sind und den Kegelschnitt R oskuliren. Um die beiden einzweideutigen Tangentensysteme durch fünf Strahlenpaare zu fixiren, werden sich am besten zwei Grenzkegelschnitte verwenden lassen. Da es uns jedoch hier auf die eigentliche Construction weniger ankommt (wir kennen eine solche bereits aus Art. 17.), so soll die Sache in dieser Beziehung nicht weiter entwickelt werden.

Von Wichtigkeit ist, dass die drei Tangenten T_1, T_2, T_3 mit dem Dreieck $\overline{12\delta}$ gleichzeitig einen und denselben Kegelschnitt berühren, was aus dem citirten Satze von Steiner durch dessen Uebertragung in allgemein duale Form hervorgeht.

Nun entsprechen den drei Tangenten T_1, T_2, T_3 des Directionskegelschnittes die drei Inflexionspunkte i_1, i_2, i_3 der Curve C_4^3, und da T_1, T_2, T_3 die Tangenten sind, welche R mit einem dem Dreieck 12δ eingeschriebenen Kegelschnitte gemein hat, so folgt daraus nach Früherem sofort, dass die drei Inflexionspunkte in gerader Linie liegen.

„Die drei Inflexionspunkte einer Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte liegen in einer und derselben Geraden.“

Die Gerade, in welcher i_1, i_2 und i_3 liegen, ist die Polare von 1 bezüglich des Kegelschnittes, welcher dem Dreieck 12δ eingeschrieben ist und T_1, T_2, T_3 zu Tangenten besitzt.

30. Wir gehen in diesem Artikel noch einmal zu der Aufgabe zurück, eine Curve C_4^3 dritter Ordnung zu construiren, wenn der Doppelpunkt δ, zwei Inflexionspunkte i_1, i_2 nebst deren Tangenten I_1, I_2 gegeben sind. Fig. 18 (Taf. V).

Nimmt man i_1 zum Scheitel des eindeutigen Büschels und bestimmt den Directionskegelschnitt bezüglich des zweiten Inflexionspunktes i_2, so erhält man für denselben folgende Tangenten:

1) I_1 berührt im Punkte b, wo diese Gerade von $\overline{\delta i_2}$ geschnitten wird, 2) $\overline{i_1 i_2}$, 3) der zu I_2 bezüglich des Winkels $\delta i_2 i_1$ conjugirt harmonische Strahl I_2', welcher in dem Punkte a berührt wird, wo ihn $\overline{\delta i_1}$ schneidet.

Bezeichnet man den Schnittpunkt von I_1 und I_2' mit m, so ist der Directionskegelschnitt R dem Dreieck $i_1 i_2 m$ eingeschrieben und berührt die Seiten $\overline{i_1 m}$, $\overline{i_2 m}$ desselben resp. in den Punkten b, a. Man erhält somit den Berührungspunkt der dritten Seite $\overline{i_1 i_2}$, wenn man den Schnitt von $\overline{i_1 a}$ und $\overline{i_2 b}$, d. i. den Punkt δ mit m verbindet, und

die erhaltene Verbindungsgerade mit $\overline{i_1 i_2}$ zum Schnitte bringt. Der Schnittpunkt i_3 ist der Berührungspunkt von $\overline{i_1 i_2}$ mit R; dieses ist aber nach Früherem der dritte Schnittpunkt der Geraden $\overline{i_1 i_2}$ mit der Curve $C_4{}^3$, und weil alle drei Inflexionspunkte in einer und derselben Geraden liegen müssen, so ist i_3 der dritte Inflexionspunkt der Curve. Die Tangenten des Doppelpunktes sind die von δ aus an den Directionskegelschnitt gehenden zwei Tangenten, von welchen sich leicht zeigen lässt, dass sie in diesem Falle immer imaginär sind. Die von δ an R gehenden zwei Tangenten berühren diesen Kegelschnitt in den zwei Punkten, in welchen er von der Polare P des Doppelpunktes δ geschnitten wird, welche Polare aber jene Gerade (P) ist, welche die drei Schnittpunkte der Seiten des Dreiecks $i_1 i_2 m$ mit den Seiten des Dreiecks $a b i_3$ enthält. Ihre Schnittpunkte mit dem Kegelschnitte R kann man desshalb als die beiden Doppelpunkte folgender zwei projectivischen Punktsysteme betrachten.

Bezeichnen wir nämlich i_3 auch mit dem Buchstaben c, so sollen a, b, c drei Punkte des einen Systems sein, denen der Reihe nach die Punkte c, a, b im zweiten Systeme entsprechen sollen, wesshalb die Punkte a, b, c auch die Buchstaben b', c', a' tragen.

Durch diese drei Punktepaare aa', bb', cc' sind zwei projectivische Punktsysteme bestimmt, für welche die Gerade P jene ist, welche aus R die Doppelpunkte schneidet; denn P ist der Ort der Schnitte von ab' mit $a'b$, von bc' mit $b'c$, von ca' mit $c'a$.

Nun sind jedoch die beiden Punktsysteme derart, dass sich keine zwei von entsprechenden Punktepaaren gebildeten Segmente irgendwie decken. Jedem Punkte des Bogens ab entspricht ein Punkt des Bogens $a'b'$ oder ca; jedem Punkte von bc ein Punkt von $b'c'$ oder ab; und jedem Punkte von ca ein Punkt von $c'a'$ oder bc. Man sieht also, dass es nicht geschehen kann, dass ein Punkt mit seinem entsprechenden zusammenfiele.

Die Doppelpunkte der beiden projectivischen Punktsysteme oder was dasselbe ist, die Schnittpunkte von P mit R sind imaginär; desshalb sind es auch die von δ an R gehenden Tangenten oder die Doppelpunktstangenten.

„Sind alle drei Inflexionspunkte einer Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte reell, so sind die beiden Tangenten des Doppelpunktes imaginär — derselbe ist ein isolirter Doppelpunkt.“

31. Wir haben vom Art. 15. angefangen uns ausschliesslich mit den Curven dritter Ordnung, welche einen Doppelpunkt besitzen, beschäftigt und kommen nun dazu, auch den reciproken Curven, nämlich jenen der dritten Classe mit einer Doppeltangente gerecht zu werden.

Es versteht sich von selbst, dass wir uns bei denselben sehr kurz fassen werden, da wir alle bei den Curven $C_4{}^3$ vorgekommenen Entwickelungen übergehen wollen. Wir stellen im Folgenden nur die wichtigsten die Curven $C_3{}^4$ betreffenden Sätze und Aufgaben mit einer skizzirten Lösung der letzteren zusammen.

„Von einer Curve dritter Classe ist die Doppeltangente $\varDelta$ und sechs weitere Tangenten gegeben, man soll die Curve construiren."

Die sechs gegebenen Tangenten mögen 1, 2, 3, 4, 5, 6 heissen. Man wird die Curve $C_3{}^4$ als das Erzeugniss zweier ein-zweideutigen Punktreihen construiren. Zu dem Behufe nehme man eine der sechs Tangenten, z. B. 6 zum Träger der eindeutigen Reihe an, während die Doppeltangente der Träger der zweideutigen Reihe ist. Die fünf weiteren Tangenten 1, 2, 3, 4, 5 bestimmen auf dem Trägerpaare $\varDelta$, 6 fünf Paare entsprechender Punkte beider Reihen, wodurch dieselben bestimmt sind. Zu ihrer Vervollständigung dient auch hier der Directionskegelschnitt R. Fig. 23 (Taf. V).

Bestimmt man ihn bezüglich des der Tangente 1 entsprechenden Punktepaares beider Reihen, so sagen wir, er sei bezüglich der Tangente 1 bestimmt worden. In diesem Falle geht er durch den Schnitt von 6 und 1 und durch weitere vier Punkte, welche den Tangenten 2, 3, 4, 5 entsprechen. Vom Punkte (61), von dem aus an die Curve $C_3{}^4$ die beiden Tangenten 6 und 1 gehen, wird noch eine dritte Tangente sich legen lassen müssen, weil die Curve von der dritten Classe ist. Diese dritte Tangente ist die Tangente des Directionskegelschnittes R im Punkte (61); hiemit hätten wir folgende Aufgabe gelöst:

„Eine Curve dritter Classe ist durch die Doppeltangente und sechs weitere Tangenten gegeben, man soll die dritte durch den Schnittpunkt zweier dieser Tangenten gehende Tangente der Curve lineal construiren."

Der Träger $\varDelta$ der zweideutigen Reihe schneidet den Directionskegelschnitt R in zwei reellen, imaginären oder zusammenfallenden Punkten g_1, g_2, welche dem gemeinsamen Punkte ($\varDelta$ 6) beider Reihen entsprechen, und offenbar die Berührungspunkte der Doppeltangente sind.

„Die beiden Schnittpunkte der Doppeltangente mit dem Directionskegelschnitte sind die Berührungspunkte derselben mit der Curve."

„Die Doppeltangente $\varDelta$ unserer Curve $C_3{}^4$ ist eine eigentliche oder ideelle Doppeltangente oder eine Wendetangente, je nachdem dieselbe den Directionskegelschnitt schneidet, nicht schneidet oder berührt."

Bei einer Curve dritter Classe mit einer Wendetangente berührt also diese den Directionskegelschnitt.

Die Tangente 6, welche zum Träger der eindeutigen Reihe gewählt wurde, schneidet den Directionskegelschnitt R ausser im Punkte (61) noch in einem zweiten Punkte t_6, welcher der Berührungspunkt der Tangente 6 mit der Curve C_3^4 ist.

„Der Berührungspunkt des Trägers der eindeutigen Reihe ist dessen zweiter Schnittpunkt mit dem Directionskegelschnitte.“

Da man diesen Schnittpunkt leicht lineal construiren kann, so haben wir gleichzeitig folgende Aufgabe gelöst:

„Von einer Curve dritter Classe ist die Doppeltangente $\varDelta$ und sechs weitere Tangenten gegeben, man soll den Berührungspunkt einer der sechs Tangenten construiren.“

Man wird die betreffende Tangente zum Träger der eindeutigen Reihe nehmen und ihren zweiten Schnittpunkt mit dem Directionskegelschnitte bestimmen.

Die zum Träger der eindeutigen Reihe genommene Tangente 6 wird die Curve C_3^4, da diese von der vierten Ordnung ist, in zwei Punkten schneiden, welche mittelst des Directionskegelschnittes leicht in folgender Weise bestimmt werden können.

Von dem Punkte $(\varDelta 1)$ aus gehen nämlich an den Directionskegelschnitt R zwei Tangenten, welche die Tangente 6 in ihren zwei Schnittpunkten v und w mit der Curve C_3^4 treffen. Die Tangenten V_{12} und W_{12} dieser beiden Punkte v und w lassen sich eben so einfach wie die Punkte selbst construiren. Projicirt man nämlich die Berührungspunkte der von $(\varDelta 1)$ an R gezogenen Tangenten aus (61) auf $\varDelta$ und verbindet die so erhaltenen Punkte auf $\varDelta$, wie sie den Punkten v und w entsprechen, mit diesen Letzteren, so stellen die Verbindungslinien die Tangenten der Punkte v und w vor. Hierin ist die Lösung der folgenden Aufgabe enthalten:

„Von einer Curve dritter Classe ist die Doppeltangente und sechs weitere Tangenten gegeben, man soll die beiden Schnittpunkte einer dieser sechs Tangenten mit der Curve nebst deren Tangenten construiren.“

Man braucht nur die betreffende Tangente als die mit 6 bezeichnete der vorigen Betrachtung anzusehen.

Die beiden Tangenten V_{12}, W_{12} der Punkte v, w sind der Tangente 6 zugeordnet, und bestimmen mit dieser auf der Doppeltangente $\varDelta$ drei Punkte $(\varDelta 6)$, $(\varDelta V_{12})$ und $(\varDelta W_{12})$ zweier ein-zweideutigen Punktreihen, deren Doppel- und Verzweigungspunkte die Berührungspunkte g_1 und g_2 der Doppeltangente sind. Es entspricht dabei dem Punkte $(\varDelta 6)$ das Punktepaar $(\varDelta V_{12})$, $(\varDelta W_{12})$; dem Punkte g_1 als Verzweigungspunkt der Punkt g_2 als Doppelpunkt und umgekehrt.

Die drei Doppelpunkte σ_1, σ_2, σ_3 der beiden einzweideutigen Reihen,

welche nach Art. 37. des 1. Theiles leicht construirt werden können, liefern die drei Spitzen (Rückkehrtangenten) der Curve. Construirt man nämlich die drei durch σ_1, σ_2, σ_3 an C_3^4 gehenden Tangenten S_1, S_2, S_3, so sind diess die Spitzentangenten. Die drei Spitzen selbst findet man dadurch, dass man die Berührungspunkte der Spitzentangenten bestimmt. Dass man mittelst der durch zugeordnete Tangentenpaare auf der Doppeltangente $\varDelta$ bestimmten zwei ein-zweideutigen Punktreihen leicht die beiden Schnittpunkte einer Curventangente mit der Curve oder deren Berührungspunkt construiren könne, ist von selbst klar, und wir verweisen den Leser auf die reciproken Entwickelungen des 15. Artikels.

Wir haben jetzt die Aufgabe gelöst:

„Von einer Curve dritter Classe ist die Doppeltangente und sechs weitere Tangenten gegeben, man soll die drei Rückkehrtangenten construiren“,

und wollen zum Schlusse dieses Artikels folgende Aufgabe besprechen:

„Von einer Curve dritter Classe ist die Doppeltangente und sechs weitere Tangenten gegeben, man soll die drei durch einen beliebigen Punkt gehenden Tangenten der Curve construiren.“

Wenn $\varDelta$ die Doppeltangente und 1, 2, 3, 4, 5, 6 die weiteren sechs Tangenten sind, ferner mit P der Punkt bezeichnet wird, durch welchen die Tangenten gezogen werden sollen, so nehme man aus P den Schein jener zwei ein-zweideutigen Punktreihen, welche die Tangenten 1, 2, 3, 4, 5 auf $\varDelta$ und 6 bestimmen. Man erhält so zwei ein-zweideutige concentrische Büschel, deren drei Doppelstrahlen die gesuchten drei Tangenten sind. Zur Auffindung der drei Doppeltangenten bedient man sich eines durch P gehenden Constructionskreises. Wenn P unendlich weit fällt, so wird man am besten eine die beiden Parallelstrahlenbüschel schneidende Transversale benützen, auf welcher zwei ein-zweideutige Punktreihen entstehen, durch deren drei Doppelpunkte die drei verlangten Tangenten hindurchgehen.

32. Jeder Punkt des Directionskegelschnittes R Fig. 23 (Taf. V) liefert eine Tangente der Curve C_3^4.

So z. B. gibt der Punkt ϑ die Tangente t, welche man erhält, indem man ϑ von (61) auf $\varDelta$ und von ($\varDelta$1) auf 6 projicirt und die beiden so erhaltenen Punkte m und n mit einander verbindet. Es entspricht in dieser Art jedem Punkte von R eine Tangente von C_3^4 und umgekehrt, so dass wir sagen können:

„Die Tangenten der Curve C_3^4 und die ihnen entsprechenden Punkte des Directionskegelschnittes R sind zwei projectivische Systeme“ — natürlich reciproker Natur.

Zwei Punkte von R liefern zwei Tangenten von C_3^4, und wenn

erstere unendlich nahe liegen, so werden auch letztere unendlich nahe bei einander sein, d. h. eine Tangente von R wird uns einen Punkt von $C_3{}^4$ liefern und umgekehrt.

Stellt man in dieser Hinsicht die in Art. 16. vorkommenden Betrachtungen in dualer Form an, so kommt man zu folgendem Resultate:

„Die von einem Punkte ϑ des Directionskegelschnittes R nach $(\varDelta 1)$ und (61) gehenden zwei Strahlen bilden mit der Tangente T von R in ϑ und mit dem nach dem Berührungspunkte τ der dem Punkte ϑ entsprechenden Tangente t gehenden Strahle ein harmonisches Büschel.“ (Siehe Fig. 23, Taf. V.)

Kennt man also T, so kann man τ und kennt man τ, so kann man T construiren.

Der ausgesprochene Satz liefert die Mittel zur Lösung der folgengen Aufgaben:

„Von einer Curve dritter Classe ist die Doppeltangente und sechs weitere Tangenten gegeben, man soll den Berührungspunkt einer derselben construiren, ohne sie zum Träger der eindeutigen Reihe zu nehmen.“

Ist es die Tangente t, welcher der Punkt ϑ des Directionskegelschnittes entspricht, so wird man (nach Pascal) in ϑ die Tangente T des Directionskegelschnittes R construiren, den zu dieser conjugirt harmonischen Strahl bezüglich des Winkels $m\vartheta n$ zeichnen, welcher t im verlangten Berührungspunkte τ schneidet.

„Von einer Curve dritter Classe ist die Doppeltangente $\varDelta$ und fünf weitere Tangenten $1, 2, 3, 4, 5$ nebst dem Berührungspunkte τ_4 der vorletzten gegeben, man soll die Curve construiren.“

Nimmt man 5 zum Träger der eindeutigen Reihe, so erhält man für den Directionskegelschnitt nur vier Punkte, von denen einer ϑ_4 der Tangente 4 entsprechen wird. Mittelst τ_4 kann man nun leicht die Tangente T_4 des Directionskegelschnittes R im Punkte ϑ_4 construiren.

Zieht man nämlich von ϑ_4 nach (51) und $(\varDelta 1)$ [wenn der Directionskegelschnitt bezüglich der Tangente 1 bestimmt werden soll] zwei Strahlen, und construirt jenen Strahl, welcher mit $\overline{\vartheta_4 \tau_4}$ den Winkel derselben harmonisch theilt, so ist dieser die Tangente T_4 von R in ϑ_4.

Nun hat man vom Directionskegelschnitte vier Punkte nebst der Tangente in einem derselben; man kann daher beliebig viele Punkte von R oder beliebig viele Tangenten von $C_3{}^4$ construiren.

33. Die im vorigen Artikel angeführte Constructionsmethode des Berührungspunktes irgend einer Tangente der Curve $C_3{}^4$ lässt sich nicht auf die Tangente 1 Fig. 23 (Taf. V) anwenden, bezüglich deren der Directionskegelschnitt R bestimmt wurde.

Eine Betrachtung, welche der in Art. 17. enthaltenen dual angestellt wird, zeigt, dass der Berührungspunkt p' der Tangente 1 der vierte harmonische Punkt zu (61), (Δ1) und p ist, wobei p der zweite Schnittpunkt von 1 mit R ist.

Kennt man p, so kann man p', und wenn man p' kennt, so kann man p construiren.

34. Im Vorangehenden sind die Mittel zur Lösung folgender Aufgaben vollständig enthalten.

„Eine Curve dritter Classe ist durch die Doppeltangente, vier weitere Tangenten nebst den Berührungspunkten zweier derselben gegeben, man soll sie construiren."

„Eine Curve dritter Classe ist durch die Doppeltangente und drei weitere Tangenten nebst deren Berührungspunkten gegeben, man soll sie construiren."

In beiden Aufgaben wird man vom Directionskegelschnitte R auf Grund der vorhergehenden Artikel so viele Bestimmungsstücke erhalten, als zu seiner Festsetzung und Construction nöthig sind, ob man nun diese oder jene Tangente zum Träger der eindeutigen Reihe nimmt und den Directionskegelschnitt bezüglich dieser oder jener Tangente bestimmt.

Wir überlassen die Durchführung dieser sowie verschiedener spezieller Fälle dem Leser und wollen nur auf solche Curven dritter Classe aufmerksam machen, für welche die unendlich weite Gerade die Doppeltangente ist. Unter diesen Curven hat eine, nämlich die „Hypocycloide mit drei Rückkehrpunkten", welche von Steiner im 53. und von Cremona im 64. Bande von Crelle's Journal behandelt wurde, besonderes Interesse.

Ohne uns näher auf diese Curve speziell einzulassen, stellen wir jenen Lesern, bei welchen die Sache Interesse erregt, folgende Aufgaben, welche auf die entwickelten Prinzipien gestützt, leicht gelöst werden können.

„Von einer Hypocycloide mit drei Rückkehrpunkten sind vier Tangenten gegeben, man soll dieselbe construiren, sowie zu den Tangenten die Berührugspunkte bestimmen."

„Von einer Hypocycloide mit drei Rückkehrpunkten sind drei Tangenten nebst dem Berührungspunkte einer derselben gegeben, man soll sie construiren."

„Von derselben Curve sind zwei Tangenten nebst deren Berührungspunkten gegeben, man soll die Curve construiren."

Auf Grund der nachfolgenden Artikel kann man auch folgende Aufgabe lösen:

„Von einer Hypocycloide mit drei Rückkehrpunkten ist eine Tangente und ein Rückkehrpunkt nebst dessen Tangente gegeben, man soll die Curve construiren."

Diese Hypocycloide berührt die unendlich weite Gerade in den beiden imaginären Kreispunkten, wesshalb der Reductionskegelschnitt ein Kreis sein muss.[1])

35. Jede Curve dritter Classe mit einer Doppeltangente besitzt drei Rückkehrtangenten, welche sich in einem und demselben Punkte schneiden.

Diese drei Rückkehrtangenten sind dann sämmtlich reell, wenn die Doppeltangente eine ideelle ist, und es ist nur eine reell, wenn die Doppeltangente eine eigentliche ist.

Aus einer einfachen Tangente wird eine Rückkehrtangente, wenn von den zwei Schnittpunkten derselben mit der Curve einer in ihren Berührungspunkt fällt.

Soll daher in Fig. 23 (Taf. V) die zum Träger der eindeutigen Reihe genommene Tangente 6 eine Rückkehrtangente werden, so muss einer der Punkte v oder w in den Berührungspunkt t_6 hineinfallen, welcher dann selbst die Spitze der Curve ist. Dies wird dann geschehen, wenn der Reductionskegelschnitt R im Punkte t_6 die von t nach ($\varDelta$1) gezogene Gerade zur Tangente hat.

Daher der Satz:

„Ist der Träger der eindeutigen Reihe eine Rückkehrtangente der Curve, so berührt der durch den Rückkehrpunkt gehende Directionskegelschnitt in demselben eine Gerade, welche nach dem Schnittpunkte der Doppeltangente mit jener Tangente geht, bezüglich deren der Directionskegelschnitt bestimmt wurde."

Wir sind hierdurch in Stand gesetzt, folgende Aufgabe zu lösen:

„Von einer Curve dritter Classe ist die Doppeltangente, eine Rückkehrtangente nebst deren Berührungspunkt und drei weitere Tangenten (oder zwei Tangenten nebst dem Berührungspunkte einer derselben) gegeben, man soll die Curve construiren."

Man wird die Rückkehrtangente zum Träger der eindeutigen Reihe nehmen und erhält für den Directionskegelschnitt so viele Stücke, als zu seiner Bestimmung nothwendig sind.

Die Durchführung mag auch hier dem Leser überlassen bleiben.

36. Wenn eine Curve C_3^4 dritter Classe mit einer Doppeltangente $\varDelta$ vorliegt, und man nimmt irgend eine Tangente 6 zum Träger der

---

[1]) Ich behalte mir für später vor auf diese Curve nochmals ausführlicher zurückzukommen. Der Verf.

eindeutigen, die Curve erzeugenden Reihe an und bestimmt den Directionskegelschnitt R bezüglich einer anderen Tangente 1, so entspricht jedem Punkte ϑ von R eine Tangente t von C_3^4, welche man erhält, wenn man ϑ von (61) auf Δ und von $(\Delta 1)$ auf 6 projicirt und die zwei erhaltenen Punkte verbindet. Umgekehrt entspricht jeder Tangente t von C_3^4 ein Punkt ϑ von R, welchen man erhält, wenn man $(t6)$ mit $(\Delta 1)$ und $(\Delta 6)$ mit $(t1)$ verbindet, und die beiden Verbindungslinien zum Schnitte bringt.

In dieser Art kann man aber jeder Geraden G der Ebene einen Punkt g entsprechen lassen; man braucht nur g zu definiren als den Schnittpunkt der beiden Geraden: $\overline{(\Delta G)\,(61)}$ und $\overline{(6G)\,(\Delta 1)}$.

„Den sämmtlichen Strahlen, welche durch einen Punkt p gehen, entsprechen dann offenbar die Punkte eines Kegelschnittes P, welcher dem Dreiseit $6\Delta 1$ umschrieben ist und in den Ecken (61) und $(\Delta 1)$ jene zwei Linien zu Tangenten besitzt, welche diese Ecken mit dem Punkte P verbinden, so dass also der Punkt p der Pol der Seite 1 bezüglich dieses Kegelschnittes ist.“

Denn dreht sich der Strahl G um den Punkt p, so beschreiben die Linien $\overline{(\Delta G)\,(61)}$ und $\overline{(6G)\,(\Delta 1)}$ an den Scheiteln $(\Delta 1)$ und (61) zwei projectivische Büschel, deren Directionscentrum der Punkt p ist, und für welche die Strahlen Δ und 6 zwei projectivisch entsprechende sind; wir sagen, dass der Kegelschnitt P dem Punkte p zugeordnet sei; daher:

„Jedem Punkte p ist ein Kegelschnitt P zugeordnet, welcher dem Dreiseit $\Delta 16$ umgeschrieben ist und für welchen p der Pol von 1 ist.“

Jedem Punkt von P entspricht ein Strahl durch p und, da jedem Punkte von R eine Tangente von C_3^4 entspricht, so erkennt man, dass den Schnittpunkten der beiden Kegelschnitte R und P die durch den Punkt p gehenden Tangenten der Curve C_3^4 entsprechen.

Die beiden Kegelschnitte P und R haben ausser dem Punkte (61) noch drei weitere Punkte gemeinschaftlich, welchen die drei von p an C_3^4 gehenden Tangenten entsprechen.

Wir haben hiemit eine zweite Lösungsart der folgenden Aufgabe erlangt:

„Eine Curve dritter Classe ist durch die Doppeltangente und weitere zu ihrer Bestimmung nothwendigen Stücke gegeben, man soll die drei durch einen beliebigen Punkt p gehenden Tangenten der Curve construiren.“

Man wird den dem Punkte p zugeordneten Kegelschnitt P und dessen drei weitere Schnittpunkte mit R bestimmen; die diesen drei

Punkten entsprechenden Tangenten der Curve C_3^4 werden durch den Punkt p hindurchgehen, womit die Aufgabe gelöst erscheint.

Gehört der Punkt p der Curve C_3^4 an, so fallen zwei von den drei Tangenten in die Tangente des Punktes p hinein; demgemäss müssen auch zwei von den drei Schnittpunkten der beiden Kegelschnitte R und P zusammenfallen, d. h. die beiden Kegelschnitte müssen sich berühren.

„Den Punkten der Curve C_3^4 sind jene Kegelschnitte zugeordnet, welche dem Dreiseit ($\varDelta$61) umgeschrieben sind und den Directionskegelschnitt R berühren.“

Die jeweilige Berührungstangente beider Kegelschnitte entspricht dem Berührungspunkte der Curventangente.

Auf diesen Satz haben wir schon in einem vorhergehenden Artikel, freilich indirect, eine Construction der Berührungspunkte der Tangenten von C_3^4 gestützt.

Wenn der Punkt p eine Spitze der Curve C_3^4 wird, so fallen alle drei durch ihn gehenden Tangenten in die Spitzentangente.

Es muss daher der dem Punkte p in diesem Falle zugeordnete Kegelschnitt ein solcher sein, dessen drei weitere Schnittpunkte mit R zusammenfallen, d. h. welcher den Kegelschnitt R oskulirt.

„Einem Rückkehrpunkte der Curve C_3^4 ist ein Kegelschnitt zugeordnet, welcher den Directionskegelschnitt in jenem Punkte oskulirt, welcher der Rückkehrtangente entspricht.“

Diess gibt eine neue Lösungsart der folgenden Aufgabe:

„Eine Curve dritter Classe ist durch die Doppeltangente, eine Rückkehrtangente nebst deren Berührungspunkte und drei weitere Tangenten (oder aequivalente Stücke) gegeben, man soll sie construiren.“

Wir haben diese Aufgabe früher dadurch gelöst, dass wir die Rückkehrtangente zum Träger der eindeutigen Reihe nahmen. Wir können nun eine beliebige andere Tangente zum Träger dieser Reihe nehmen und erhalten für den Directionskegelschnitt drei Bedingungen. (Entweder drei Punkte oder zwei Punkte nebst der Tangente eines derselben.) Die beiden fehlenden Bedingungen werden dadurch ersetzt, dass der Directionskegelschnitt R den dem Rückkehrpunkte zugeordneten Kegelschnitt in dem Punkte oskuliren muss, welcher der Rückkehrtangente entspricht.

Nun ist der Kegelschnitt R bestimmt und leicht lineal zu construiren, womit unsere Aufgabe gelöst ist.

Frägt man über die Natur des Systems von Kegelschnitten, welche den einzelnen Punkten einer Tangente t der Curve C_3^4 entsprechen, so erhält man analog wie im Art. 27. die Antwort:

„Die den einzelnen Punkten einer Tangente t zugeordneten Kegelschnitte bilden ein Büschel, dessen vier Scheitel sind: die drei Ecken des Dreiseits $\Delta 61$, und der der betreffenden Tangente entsprechende Punkt des Directionskegelschnittes.“

Zwei Büschelscheitel liegen somit auf dem Directionskegelschnitte R, wesshalb die einzelnen Curven des Büschels auf diesem Kegelschnitte eine Punktinvolution zweiten Grades bestimmen. Die beiden Doppelpunkte derselben, welche sich leicht construiren lassen, entsprechen, wie leicht einzusehen ist, den beiden Tangenten der Curve C_3^4, welche der Tangente t zugeordnet sind. Diese beiden Tangenten werden somit t in jenen zwei Punkten treffen, in welchen diese Tangente die Curve C_3^4 schneidet.

Wir erhalten somit eine Lösung der folgenden Aufgabe:

„Eine Curve dritter Classe ist durch die Doppeltangente und sechs weitere Bedingungen gegeben, man soll die beiden Schnittpunkte derselben mit irgend einer ihrer Tangenten construiren, ohne jedoch die betreffende Tangente zum Träger der eindeutigen Reihe zu nehmen.“

Der betreffenden Tangente entspricht ein Punkt des Directionskegelschnittes R, welcher mit den drei Ecken des Dreiseits $\Delta 61$ die vier Scheitel des zu verwendenden Kegelschnittsbüschels liefert. Dasselbe bestimmt auf R eine Involution, deren Doppelpunkten zwei Tangenten von C_3^4 entsprechen, welche unsere Tangente in den gesuchten Punkten schneiden.

37. Auf dieselben Prinzipien gestützt, kann mau auch folgende Aufgabe lösen:

„Die vier Schnittpunkte irgend einer Geraden mit einer Curve dritter Classe vierter Ordnung zu construiren.“

Sollen die Schnittpunkte einer Geraden G mit der Curve C_3^4 bestimmt werden, so bedenke man nur, dass dies solche Punkte sind, für welche zwei von den drei durchgehenden Tangenten zusammenfallen.

Um die durch irgend einen Punkt von G gehenden drei Tangenten der Curve C_3^4 zu erhalten, benützen wir den dem Punkte zugeordneten Kegelschnitt, welcher den Directionskegelschnitt R ausser im Punkte (61) noch dreimal schneidet, welchen drei Schnittpunkten die drei fraglichen Tangenten entsprechen. Soll der Punkt von G zugleich ein Punkt von C_3^4 sein, so müssen zwei von den drei Tangenten zusammenfallen, d. h. der dem Punkte zugeordnete Kegelschnitt muss den Directionskegelschnitt berühren. Wir haben somit unter den Punkten von G jene herauszufinden, deren zugeordnete Kegelschnitte den Directionskegelschnitt berühren.

Die den einzelnen Punkten von G zugeordneten Kegelschnitte bilden, wie sich leicht zeigen lässt, ein Kegelschnittsbüschel. Sie gehen nämlich alle durch die Ecken des Dreiseits $\varDelta 61$, so dass der Pol der Seite 1 auf der festen Geraden G verbleibt. Verbindet man ($G6$) mit ($\varDelta 1$) und ($\varDelta G$) mit (61), so erhält man zwei Gerade, welche sich im vierten Scheitel des Kegelschnittsbüschels schneiden. Die Gerade G ist eine Diagonaldreiecksseite des Scheitelvierecks.

Von den vier Scheiteln des Büschels liegt nur einer, nämlich (61) auf dem Directionskegelschnitte R, wesshalb das Büschel auf diesem Kegelschnitte eine cubische Punktinvolution bestimmen wird. Diese Involution hat vier Doppelpunkte, welchen jene vier Tangenten unserer Curve C_3^4 entsprechen, die die Gerade G in deren vier Schnittpunkten mit C_3^4 treffen.

Die Construction der vier Doppelpunkte der cubischen Involution geschieht wie im Art. 28.

Ist die Gerade G die unendlich weite Gerade, so sind deren vier Schnittpunkte mit C_3^4 die vier Assymptotenrichtungen der Curve. Die vier obenerwähnten Tangenten, welche diese vier Schnittpunkte liefern, werden in diesem Falle die Assymptoten selbst.

Die vier unendlich weiten Punkte einer Curve C_3^4 sind entweder alle reell, oder zwei reell und zwei imaginär, d. h. die Curve hat vier reelle oder zwei reelle und zwei imaginäre Assymptoten.

Im ersten Falle können zwei von den vier Schnittpunkten zusammenfallen, wodurch die unendlich weite Gerade zu einer Tangente der Curve wird. Oder aber es fallen gleichzeitig die beiden anderen Schnittpunkte zusammen; dann ist die unendlich weite Gerade die Doppeltangente.

Wenn im zweiten Falle die beiden reellen Schnittpunkte zusammenfallen, so wird die unendlich weite Gerade ebenfalls zu einer Tangente.

„Die unendlich weite Gerade schneidet eine Curve C_3^4 entweder in vier Punkten, oder sie ist eine Tangente der Curve, oder sie ist schliesslich die Doppeltangente derselben.“

Mit anderen Worten:

„Eine Curve C_3^4 hat entweder vier im Endlichen liegende Assymptoten, oder es sind zwei im Endlichen und zwei unendlich weit, oder schliesslich alle vier Assymptoten sind unendlich weit.“

Andere Fälle können nicht eintreten.

Die Curven mit vier reellen im Endlichen liegenden Assymptoten könnte man hyperbolisch, jene mit nur zwei reellen Assymptoten im Endlichen elliptisch, die, für welche die unendlich weite Gerade eine Tangente ist, parabol hyperbolisch oder parabolo-elliptisch (je nachdem die im Endlichen liegenden zwei Assymptoten reell oder imaginär

sind), und die, für welche die unendlich weite Gerade die Doppeltangente ist, parabolisch nennen.

So wäre die Steiner'sche Hypocycloide eine parabolische Curve.

38. Wir haben schon zwei Methoden kennen gelernt, wie eine Spitzentangente bei der Construction einer Curve $C_3{}^4$ berücksichtigt wird.

Die eine gründete sich darauf, dass wir die Spitzentangente zum Träger der eindeutigen Reihe nahmen, während wir bei der zweiten einen Hülfskegelschnitt verwendeten, welchen der Directionskegelschnitt oskuliren musste.

Eine dritte Methode besteht nun darin, dass wir bezüglich der Spitzentangente den Directionskegelschnitt R bestimmen.

Ist $\varDelta$ die Doppeltangente, 6 der Träger der eindeutigen Reihe und S die Spitzentangente mit dem Berührungspunkte s, und bestimmt man den Directionskegelschnitt R bezüglich S, so geht er erstlich durch den Punkt $(S6)$, zweitens durch den zu s bezüglich des Punktepaares $(S\varDelta)$, $(S6)$ conjugirt harmonischen Punkt s', und muss schliesslich (nach Art. 23.) im Punkte s' die Gerade $\overline{s'(\varDelta 6)}$ berühren. Eine solche Spitzentangente nebst Berührungspunkt liefert sonach mit der Tangente 6 drei Bedingungen für den Directionskegelschnitt, also ebensoviel als sie für die Curve $C_3{}^4$ bietet. Ausser der Spitzentangente S und ihrem Berührungspunkte s müssen neben der Doppeltangente $\varDelta$ und der Tangente 6 noch zwei weitere Bedingungen (zwei Tangenten oder eine Tangente nebst dem Berührungspunkte derselben) gegeben sein, welche auch zwei weitere Bedingungen (2 Punkte oder einen Punkt nebst dessen Tangente) für den Directionskegelschnitt liefern; man hat dann fünf Bedingungen für denselben, kann also ihn und daher auch die Curve $C_3{}^4$ construiren. Wir sind nun auch im Stande folgende Aufgabe zu lösen:

„Von einer Curve dritter Classe ist die Doppeltangente $\varDelta$ und zwei Spitzentangenten S_1, S_2 nebst ihren Berührungspunkten s_1, s_2 gegeben, man soll die Curve construiren.“

Nimmt man S_2 zum Träger der eindeutigen Reihe, so muss der durch s_2 gehende Directionskegelschnitt, da er bezüglich der zweiten Spitzentangente S_1 bestimmt werden muss, in diesem Punkte die Verbindungslinie von s_2 mit $(\varDelta S_1)$ zur Tangente haben. Construirt man ferner zu dem Punkte s_1 den bezüglich des Punktepaares $(S_1\, \varDelta)$, $(S_1\, S_2)$ conjugirt harmonischen Punkt s_1', so geht der Directionskegelschnitt R auch durch diesen und hat daselbst die Verbindungslinie von s_1' mit $(S_2 \varDelta)$ zur Tangente. Schliesslich muss er aber auch durch den Punkt $(S_1\, S_2)$ gehen. Man kennt somit von R drei Punkte nebst den Tangenten in zweien derselben, wodurch er also bestimmt ist. Die Aufgabe ist hiermit gelöst.

Ausser den beiden Spitzentangenten S_1 und S_2 existirt noch eine

dritte S_3, welche durch deren Schnittpunkt $(S_1 S_2)$ hindurchgeht und nichts anderes als die Tangente des durch diesen Punkt gehenden Directionskegelschnittes ist, welche leicht construirt werden kann.

Man braucht nur den Schnitt von $\varDelta$ und $(s_2 s_1')$ mit $(S_1 S_2)$ zu verbinden um S_3 zu erhalten.

39. Die drei Spitzen s_1, s_2, s_3 der Curve C_3^4 sind solche Punkte, für welche alle drei durch sie an die Curve gehenden Tangenten in den resp. Spitzentangenten S_1, S_2, S_3 zusammenfallen. Den drei Spitzen werden also drei solche Kegelschnitte zugeordnet sein, welche den Directionskegelschnitt oskuliren und zwar in den den Spitzentangenten entsprechenden Punkten.

Darauf kann man eine Bestimmungsart der drei Spitzen resp. Spitzentangenten gründen.

Die den einzelnen Punkten zugeordneten Kegelschnitte sind dem Dreiseit $\varDelta 61$ umschrieben, wenn $\varDelta$ die Doppeltangente, 6 der Träger der eindeutigen Reihe und 1 diejenige Tangente ist, bezüglich deren der Directionskegelschnitt bestimmt wurde. Diese Kegelschnitte bilden also ein Netz.

Da ein Träger des Netzes, nämlich der Punkt (61), auch dem Directionskegelschnitt angehört, so wird es drei Kegelschnitte geben, welche den Kegelschnitt R oskuliren. Die drei Oskulationspunkte kann man leicht als die drei Doppelpunkte zweier einzweideutigen Punktsysteme auf R construiren. Da die drei Oskulationspunkte (nach Steiner) einem Kegelschnitte angehören, welcher ebenfalls dem Dreiseit $\varDelta 61$ umgeschrieben ist, und ihnen die drei Spitzentangenten entsprechen, so folgt daraus, dass die drei Spitzentangenten wirklich durch einen und denselben Punkt gehen. Die zu Art. 30. reciproken Betrachtungen lehren ferner, dass, im Falle alle drei Spitzentangenten reell sind, die Doppeltangente eine ideelle sein müsse.

---

40. Wir wenden uns nun zu dem Mittelgliede zwischen den Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte und den Curven dritter Classe mit einer Doppeltangente, nämlich zu den Curven dritter Ordnung und Classe, welche mit C_3^3 bezeichnet wurden.

Eine Curve dritter Ordnung und Classe kann ebensowohl aus einer Curve C_4^3 als auch aus einer Curve C_3^4 entstehen. Ersteres tritt dann ein, wenn die Doppelpunktstangenten von C_4^3 zusammenfallen, d. h. wenn der Doppelpunkt eine Spitze wird; und letzteres tritt dann ein, wenn die Berührungspunkte der Doppeltangente von C_3^4 zusammenfallen, d. h. wenn die Doppeltangente zu einer Inflexionstangente wird.

Wir haben schon in Art. 13. nachgewiesen, dass die auf diese zwei Arten entstandenen Curven identisch seien, und haben schon dort

erwähnt, dass eine Curve C_3^3 reciproker Natur sei, d. h. dass jeder Satz, welcher bezüglich ihrer Punkte gilt, auch (in dualer Form) in Bezug auf ihre Tangenten gilt, nur tritt an die Stelle des Rückkehrpunktes und seiner Tangente die Inflexionstangente resp. ihr Berührungspunkt.

Wir wollen den Rückkehrpunkt einer Curve C_3^3 kurz mit s und dessen Tangente mit S, ferner die Inflexionstangente mit I und ihren Berührungspunkt mit i bezeichnen.

Die für die Curven dritter Ordnung vierter Classe und jene dritter Classe vierter Ordnung von uns verwendeten Constructionsmethoden werden selbstverständlich ihre volle Giltigkeit für die Curven dritter Ordnung und Classe beibehalten. Denn man braucht sich ja nur die Doppelpunktstangenten einer C_4^3 oder die Berührungspunkte der Doppeltangente einer C_3^4 zusammenfallend zu denken um eine C_3^3 zu erhalten.

Diess hat weiter nichts als eine besondere Lage des Directionskegelschnittes bei allen Curven dritter Ordnung und Classe zur Folge.

Da nämlich der Directionskegelschnitt bei einer C_4^3 die Tangenten des Doppelpunktes berührt, so ist klar, dass er bei einer Curve dritter Ordnung und Classe durch die Spitze hindurchgehen und daselbst die Spitzentangente berühren müsse.

Und weil der Directionskegelschnitt bei einer C_3^4 die Doppeltangente in ihren Berührungspunkten durchschneidet, so folgt, dass er bei einer Curve dritter Ordnung und Classe die Inflexionstangente im Inflexionspunkte berühren müsse — wenn man nämlich die C_3^3 als Enveloppe betrachtet.

„Bei einer Curve dritter Ordnung und Classe geht der Directionskegelschnitt, wenn man die Curve als Ortscurve auffasst, durch den Rückkehrpunkt und berührt in ihm dessen Tangente; fasst man die Curve als Enveloppe auf, so berührt der Directionskegelschnitt die Inflexionstangente im Inflexionspunkte.“

Es wird nun nicht schwer sein folgende die Curven C_3^3 betreffenden Aufgaben aufzulösen:

41. „Von einer Curve dritter Ordnung und Classe ist die Spitze s nebst deren Tangente S und weitere vier Punkte 1, 2, 3, 4 gegeben, man soll die Curve construiren.“

Man wird die Curve selbstverständlich als das Erzeugniss zweier einzweideutiger Büschel construi-

„Von einer Curve dritter Ordnung und Classe ist die Inflexionstangente I nebst deren Berührungspunkte i und vier weitere Tangenten 1, 2, 3, 4 gegeben, man soll sie construiren.“

Man wird auch hier die Curve als das Erzeugniss zweier einzwei-

ren, wobei der Punkt s (in welchen δ übergegangen ist) der Scheitel des zweideutigen Büschels ist. Nimmt man nun z. B. den Punkt 4 zum Scheitel des eindeutigen Büschels, und bestimmt den Directionskegelschnitt R bezüglich des Punktes 1, so erhält man von R vier Tangenten nebst dem Berührungspunkte einer derselben. Nämlich erstens die Tangente $\overline{41}$, ferner die zwei den Punkten 2 und 3 entsprechenden Tangenten und schliesslich die Spitzentangente S, welche von R in s berührt wird. Hiemit ist der Directionskegelschnitt R bestimmt, und man kann ohne weiters die Curve C_3^3 construiren. Ebenso kann man jetzt wie in Art. 15., 16., 17., 27. leicht die Tangente irgend eines Punktes der Curve oder die von irgend einem ihrer Punkte an sie gehende Tangente construiren. Die Gerade $\overline{s1}$ schneidet nämlich ausser in s den Directionskegelschnitt noch einmal, welcher zweite Schnittpunkt mit 4 verbunden die von 4 aus an C_3^3 gehende Tangente liefert.

Wir wollen uns nicht mit allen diesen Aufgaben, welche für Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte gelöst wurden, hier noch einmal beschäftigen, und wollen nur bemerken, dass sie sich alle bei den Curven dritter Ordnung mit einer Spitze eben so und eben so leicht durchführen lassen, wobei es auch sehr oft vorkömmt, dass sie um einen Grad oder um zwei Grade niedriger werden. So wird z. B. das Auffinden des einen Inflexionspunktes der Curve deutigen Punktreihen construiren, wobei die Inflexionstangente I (in welche Δ übergegangen ist) der Träger der zweideutigen Reihe wird. Wenn man eine der vier Tangenten, z. B. 4 zum Träger der eindeutigen Reihe nimmt und den Directionskegelschnitt R bezüglich einer anderen, z. B. bezüglich 1 bestimmt, so erhält man für R vier Punkte nebst der Tangente in einem derselben. Nämlich erstens den Punkt (41), dann die beiden den zwei Tangenten 2, 3 entsprechenden Punkte, und schliesslich den Punkt i, in welchem der Directionskegelschnitt R die Inflexionstangente I berühren muss. Der Directionskegelschnitt ist dadurch unzweideutig gegeben, und man kann beliebig viele seiner Punkte und somit beliebig viele Tangenten unserer Curve construiren.

Jedem Punkte von R entspricht eine Tangente von C_3^3 und jeder Tangente von R ein Punkt von C_3^3. Man wird nun leicht nach Art. 32. den Berührungspunkt irgend einer Tangente der Curve aus der Tangente des ihr entsprechenden Punktes des Directionskegelschnittes construiren können; ebenso den Schnittpunkt irgend einer Tangente mit der Curve nach Art. 31. oder 36., welche Aufgabe hier lineal ist. Die Bestimmung der Spitzentangente ist hier ebenfalls eine einfache lineale Aufgabe, welche darauf hinauskömmt, das zweite Doppelelement zweier gleichartiger projectivischer Gebilde auf demselben Träger zu bestimmen,

nach Art. 13. eine lineale Aufgabe sein.

Die Durchführung dieser verschiedenen Aufgaben überlassen wir dem Leser und wollen uns nur mit jenen beschäftigen, welche die Construction der Curve aus gegebenen Elementen zum Gegenstande haben.

„Von einer Curve dritter Ordnung und Classe ist die Spitze s nebst deren Tangente S, ferner drei weitere Punkte nebst der Tangente eines derselben gegeben, man soll die Curve construiren.“

wenn das andere Doppelelement bekannt ist.

Auch hier müssen wir es dem Leser überlassen, diese einzelnen Aufgaben zu lösen, da sie für uns nichts wesentlich Neues liefern und dieselbe Behandlung erfordern, welche sie bei Curven dritter Classe mit einer Doppeltangente gefunden haben.

Viele von ihnen sind bei einer C_3^3 von niedrigerem Grade als bei einer C_3^4.

„Von einer Curve dritter Ordnung und Classe ist die Inflexionstangente I nebst deren Berührungspunkt i, ferner drei weitere Tangenten nebst dem Berührungspunkte einer derselben gegeben, man soll die Curve construiren.“

In beiden Aufgaben wird man sofort die zur Bestimmung des Directionskegelschnittes R nothwendigen Stücke erhalten, wodurch die Ausführung der Construction gesichert ist. Man wird die Construction selbst in drei Arten anordnen können, je nachdem man nämlich den Directionskegelschnitt in dieser oder jener Art bestimmt und diesen oder jenen Punkt (Tangente) zum Träger des eindeutigen Gebildes nimmt.

Ebenso leicht sind die folgenden Aufgaben zu lösen, wesshalb sie eine weitere Erörterung hier nicht finden sollen.

„Von einer Curve dritter Ordnung und Classe ist die Spitze nebst ihrer Tangente, ferner zwei weitere Punkte nebst deren Tangenten gegeben, man soll die Curve construiren.“

„Von einer Curve dritter Ordnung und Classe ist die Inflexionstangente nebst deren Berührungspunkte, ferner zwei weitere Tangenten nebst deren Berührungspunkten gegeben, man soll die Curve construiren.“

„Von einer Curve dritter Ordnung und Classe ist die Spitze nebst deren Tan-

„Von einer Curve dritter Ordnung und Classe ist die Spitze nebst deren Tangente,

gente, ferner die Inflexionstangente nebst deren Berührungspunkt und schliesslich ein weiterer Punkt gegeben, man soll die Curve construiren.“

ferner die Inflexionstangente nebst deren Berührungspunkt und schliesslich eine weitere Tangente gegeben, man soll die Curve construiren.“

42. Bei der Bestimmung der Curven dritter Ordnung mit einer Spitze wurde ausser der Spitze auch noch die Spitzentangente gegeben.

Wir wollen nun zeigen, dass wenn man die Tangente der Spitze nicht kennt, es immer zwei Curven gibt, welche den gegebenen Bedingungen Genüge leisten.

Die für eine Curve C_4^3 gegebenen Bedingungen, welche wir in Betracht ziehen, sind Punkte, durch welche die Curve hindurchgehen soll. Da nun eine Curve C_4^3 durch den Doppelpunkt und sechs weitere Punkte bestimmt ist, so ist klar, dass wir von einer Curve dritter Classe und Ordnung neben der Spitze nur noch fünf weitere Punkte annehmen dürfen.

Ob auf diese Art und Weise eine oder mehre Curven C_3^3 bestimmt sind, werden wir dadurch untersuchen, dass wir die ganze Schaar von Curven dritter Ordnung betrachten, welche die gegebene Spitze zum Doppelpunkte haben und durch die fünf gegebenen Punkte gehen. Diese Curvenschaar bildet offenbar ein Curvenbüschel, da durch jeden sechsten Punkt eine von denselben und nur eine einzige bestimmt wird. Jede der Curven besitzt in dem gemeinsamen Doppelpunkte ein Tangentenpaar, welche Tangentenpaare einer quadratischen Strahleninvolution angehören. Diese Involution wird zwei Doppelstrahlen besitzen, die zwei Curven des Büschels angehören, für welche der Doppelpunkt eine Spitze ist.

Wir können zu demselben Resultate auch folgendermassen gelangen:

Nimmt man einen der fünf gegebenen Punkte zum Scheitel des eindeutigen Büschels, und bestimmt den Directionskegelschnitt R bezüglich eines anderen Punktes, so erhält man nur vier Tangenten von R. Die den sämmtlichen Curven des Büschels zugehörigen Directionskegelschnitte bilden demnach ein System von einem festen Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitten — eine Kegelschnittsreihe. Die von dem Doppelpunkte an den jeweiligen Directionskegelschnitt gehenden zwei Tangenten sind die beiden Doppelpunktstangenten, und da die von einem festen Punkte an die, einem festen Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte gehenden Tangentenpaare eine Involution bilden, so ist in der That bewiesen, dass diess auch von den Doppelpunktstangentenpaaren der Curven des betrachteten Büschels gilt.

Unter den dem festen Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitten

gibt es zwei, welche durch den gemeinsamen Doppelpunkt des Curvenbüschels gehen, und welche den Doppelstrahlen der besprochenen Strahleninvolution entsprechen. Es sind diess offenbar die Directionskegelschnitte für solche Curven des Büschels, für welche der Doppelpunkt eine Spitze wird:

„Unter den Curven dritter Ordnung, welche durch fünf Punkte gehen und einen festen gemeinschaftlichen Doppelpunkt besitzen, gibt es zwei, für welche der Doppelpunkt eine Spitze wird."

Gleichzeitig haben wir folgende Aufgabe gelöst:

„Man soll jene zwei Curven dritter Ordnung zeichnen, welche durch fünf gegebene Punkte gehen und in einem gegebenen Punkte eine Spitze haben."

Man wird die Spitze zum Scheitel des zweideutigen und einen der fünf Punkte zum Scheitel des eindeutigen Büschels nehmen und den Directionskegelschnitt R bezüglich eines anderen derselben bestimmen. Man erhält von R vier Tangenten, weiss jedoch, dass R durch die Spitze hindurchgehen müsse. Diess liefert zwei Directionskegelschnitte R_1 und R_2, welche den beiden Curven dritter Ordnung entsprechen, die in dem gegebenen Punkte eine Spitze besitzen. Je nachdem R_1 und R_2 reell oder imaginär sind, werden auch die beiden Curven reell oder imaginär sein.

Ebenso einfach ergibt sich folgender Satz und die Lösung der nächstfolgenden Aufgabe:

„Unter den Curven dritter Classe, welche fünf Gerade berühren und eine feste Gerade zur Doppeltangente besitzen, gibt es zwei, für welche die Doppeltangente zu einer Inflexionstangente wird."

„Man soll jene zwei Curven dritter Classe zeichnen, welche fünf gegebene Geraden berühren und eine gegebene Gerade zur Inflexionstangente besitzen."

Aus dem über die Curven dritter Ordnung und Classe Gesagten geht hervor, dass man sie sowohl als Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte als auch als Curven dritter Classe mit einer Doppeltangente behandeln könne.

In den wenigen diese Curve betreffenden nächstfolgenden Aufgaben wird man also jede Curve C_4^3 oder C_3^4 durch eine C_3^3 ersetzen können.

43. Es erübrigt uns noch zum Schlusse der Aufgaben zu gedenken, welche aus der Verbindung der Curven C_4^3, C_3^4 und C_3^3 mit Kegelschnitten hervorgehen, und welche sich zumeist auf gemeinsame Punkte, Tangenten oder auf die Berührung und Oskulation dieser Curven beziehen.

Wir wollen zunächst die gemeinsamen Punkte einer C_4^3 und eines Kegelschnittes und die gemeinsamen Tangenten einer C_3^4 und eines Kegelschnittes zu bestimmen suchen, wo in beiden Fällen statt der C_4^3 oder C_3^4 eine C_3^3 genommen werden kann.

Eine Curve C_4^3 dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte wird von einem Kegelschnitte C_2^2 in sechs Punkten geschnitten, welche zu bestimmen eine Aufgabe des sechsten Grades wäre, mit welcher wir uns, da wir keine Mittel zu deren Lösung besitzen, nicht weiter beschäftigen wollen.

Wir wollen vielmehr nur solche Kegelschnitte mit einer C_4^3 in Verbindung bringen, welche durch den Doppelpunkt der Curve hindurchgehen, und mit einer C_3^4 nur solche, welche die Doppeltangente der Curve berühren. Ferner wollen wir nur die von den Curven C_4^3 handelnden Aufgaben näher untersuchen, während wir die dualen, für C_3^4 geltenden Aufgaben bloss aussprechen, ihre Durchführung jedoch dem Leser überlassen wollen.

„Man soll die vier Schnittpunkte einer Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte mit einem Kegelschnitte bestimmen, welcher durch den Doppelpunkt hindurchgeht."

Sei in Fig. 24 (Taf. V) C_4^3 die Curve dritter Ordnung, deren Doppelpunkt δ ist, und S der durch δ gehende Kegelschnitt. Wenn man durch einen beliebigen Punkt O auf C_4^3 Strahlen A legt, so schneiden diese den Kegelschnitt S in Punktepaaren a_1, a_2 einer Involution, und die Curve C_4^3 in Punktepaaren α_1, α_2, welche von δ aus in einer Strahleninvolution A_1, A_2 projicirt werden. Diese Strahleninvolution schneidet S in einer zweiten Punktinvolution a_1', a_2', welche mit der durch A bestimmten a_1, a_2 projectivisch ist. Denn jedem Punktepaar der Einen entspricht ein und nur ein einziges der Anderen. Diese zwei Involutionen haben vier solche Punkte, wo je zwei Punkte aus entsprechenden Paaren zusammenfallen; wir nennen sie kurz die Doppelpunkte beider Involutionen. Diese vier Doppelpunkte beider Involutionen sind aber nichts anderes als die von uns verlangten vier Schnittpunkte von C_4^3 und S. Wir finden sie einfach in folgender Weise als die Durchschnittspunkte des Kegelschnittes S mit einem zweiten Kegelschnitte S'.

Die Verbindungslinie A' von a_1' und a_2' muss, weil die beiden Punkte ein Paar einer Involution bilden, durch einen festen Punkt O' hindurchgehen, und wird offenbar ein Büschel beschreiben, welches zu dem von A beschriebenen projectivisch ist. Diese beiden von A und A' beschriebenen projectivischen Büschel erzeugen einen durch O und O' gehenden Kegelschnitt S', welcher S in denselben vier Punkten wie C_4^3 schneidet.

Wir haben somit unsere Aufgabe darauf zurückgeführt, die vier

Schnittpunkte zweier Kegelschnitte zu bestimmen. Dieselbe Behandlung erfordert die folgende reciproke Aufgabe:

„Man soll die vier gemeinsamen Tangenten einer Curve C_3^4 mit einem Kegelschnitte finden, welcher ihre Doppeltangente berührt."

Wir haben im Vorhergehenden die vier Schnittpunkte einer C_4^3 mit einem durch ihren Doppelpunkt gehenden Kegelschnitt S als die Doppelpunkte zweier projectivischen Involutionen auf S bestimmt. Nun wollen wir in aller Kürze noch zeigen, dass man dieselben Schnittpunkte als die vier Doppelpunkte zweier ein-dreideutigen Punktsysteme auf S betrachten könne.

Nimmt man nämlich den Punkt O auf dem Kegelschnitte S an, so wird ein durch O gehender Strahl A denselben noch in einem Punkte a und die Curve C_4^3 in drei Punkten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ schneiden, welche von δ auf S projicirt drei Punkte a_1, a_1, a_3 liefern, die man dem Punkte a zuordnen kann. In dieser Weise entstehen auf S zwei ein-dreideutige Punktsysteme, deren vier Doppelpunkte die vier Schnittpunkte von C_4^3 und S sind.

In derselben Weise kann man die vier gemeinschaftlichen Tangenten einer C_3^4 mit einem ihre Doppeltangente berührenden Kegelschnitte S als die vier Doppelpunkte zweier ein-dreideutigen Tangentensysteme darstellen. Ueber eindreideutige und allgemein ein-n-deutige Gebilde und deren Erzeugnisse werde ich in einem nächsten Werke, dessen Grundriss bereits fertig vorliegt, zu sprechen Gelegenheit haben.

44. „Man soll die drei Schnittpunkte einer Curve C_4^3 mit einem Kegelschnitte S bestimmen, welcher durch den Doppelpunkt δ und einen weiteren Curvenpunkt O hindurchgeht."

Ein durch O hindurchgehender Strahl A wird S in einem Punkte a und C_4^3 in einem Punktepaar α_1, α_2 schneiden, welches, von δ auf S projicirt, auf diesem ein Punktepaar a_1, a_2 liefert. Das Punktepaar a_1, a_2 kann man dem Punkte a zuordnen, wodurch auf S zwei einzweideutige Punktsysteme entstehen, welche die verlangten drei Schnittpunkte zu Doppelpunkten besitzen.

Fallen von den drei Doppelpunkten zwei oder alle drei zusammen, so wird der Kegelschnitt S die Curve C_4^3 berühren resp. oskuliren. Es wird selbstverständlich keine Schwierigkeiten haben können, solche Kegelschnitte zu zeichnen, welche die Curve C_4^3 in einem gegebenen Punkte oder in zwei verschiedenen Punkten einfach berühren und überdiess anderen Bedingungen genügen. Ebenso leicht und einfach sind die reciproken Aufgaben zu lösen. Wir wenden uns daher zu den einfach oskulirenden Kegelschnitten und zu solchen, welche mit der Curve eine Berührung der dritten Ordnung eingehen, wobei wir

voraussetzen wollen, dass ein solcher Kegelschnitt immer durch den Doppelpunkt hindurchgehe (respective die Doppeltangente berühre).

45. Um die Krümmungsverhältnisse einer Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte bestimmen zu können, werden wir sie in dem betreffenden Punkte durch einen Kegelschnitt ersetzen, welcher sie einfach oskulirt. Diesen Kegelschnitt wollen wir überdiess durch den Doppelpunkt der Curve gehen lassen, um seine Bestimmung resp. Construction so viel als möglich zu vereinfachen.

Ist C_4^3 die Curve mit dem Doppelpunkte δ, und wir wollten einen Kegelschnitt S zeichnen, welcher die Curve im Punkte a oskulirt, so betrachten wir das System von Kegelschnitten, welche C_4^3 in a berühren, durch den Doppelpunkt δ und einen beliebig gewählten nicht auf der Curve liegenden Punkt O hindurchgehen. Diese Kegelschnitte bilden offenbar ein Kegelschnittsbüschel.

Jeder Kegelschnitt dieses Büschels schneidet die Curve C_4^3 ausser in a, wo er sie berührt, in δ und noch zweimal. Die auf solche Weise auf C_4^3 entstehenden Punktepaare bilden eine quadratische Punktinvolution, von welcher man sich leicht zwei Punktepaare verschaffen kann.

Erstens schneidet die Linie $\overline{aO}$ die Curve in einem Paare, und ferner bildet der Tangentialpunkt von a mit dem Schnittpunkte der Curve mit $O\delta$ ein zweites Paar.

Durch diese zwei Punktepaare ist die Involution bestimmt, denn sie wird von δ aus durch eine Strahleninvolution projicirt.

Der von uns verlangte Kegelschnitt S kann als jener Kegelschnitt des Büschels betrachtet werden, welcher die Curve C_4^3 in einem Punktepaare schneidet, von welchem ein Punkt unendlich nahe bei a liegt.

Der zweite Schnittpunkt ist also der dem a involutorisch entsprechende Punkt a'; hat man diesen construirt, was einfach mit dem Lineal allein geschehen kann, so ist dann S jener Kegelschnitt, welcher durch δ, O und a' geht und die Curve C_4^3 in a berührt.

Die Krümmung der Curve C_4^3 in a ist dieselbe, wie jene des Kegelschnittes S.

Da der Punkt O ganz beliebig gewählt werden kann, so kann man ihn auch so annehmen, dass die beiden Punktepaare, durch welche die verwendete Punktinvolution gegeben erscheint, die beiden Doppelpunkte werden.

Es ist dazu nur nöthig, dass der Punkt O auf einer der beiden von a an C_4^3 gehenden Tangenten und auf dem nach dem Tangentialpunkte von a gehenden Doppelpunktsstrahle liege.

Diese spezielle Anordnung wird also nur dann möglich sein, wenn der Punkt a (im Falle δ ein eigentlicher Doppelpunkt ist) nicht auf der Schlinge der Curve liegt.

Ist Fig. 25 (Taf. V) C_4^3 die Curve mit dem Doppelpunkte δ, a der

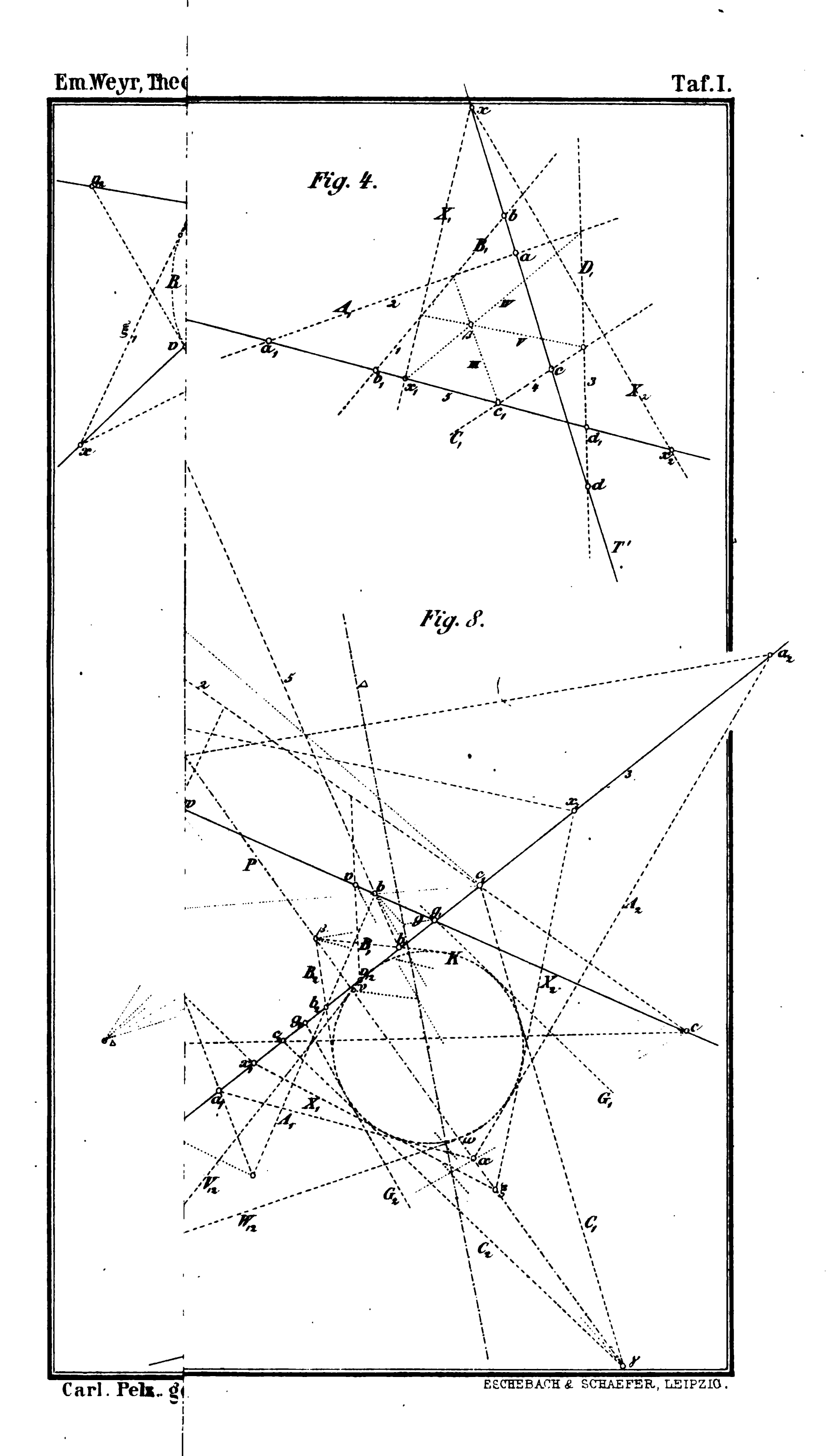
Punkt, für welchen der oskulirende Kegelschnitt S gezeichnet werden soll, ferner α der Tangentialpunkt von a, und t die eine von a an C_4^3 gehende in ϑ berührende Tangente, so sei der Schnitt von t mit $\overline{\delta\alpha}$ der Punkt O. Dann sind α und ϑ die zwei Doppelpunkte der verwendeten Involution und somit $\overline{\alpha\delta}$ und $\overline{\delta\vartheta}$ die zwei Doppelstrahlen der Involution, durch welche die erstere von δ aus projicirt wird. Construirt man nun den zu $\overline{\delta a}$, bezüglich des Winkels $\alpha\delta\vartheta$, conjugirt harmonischen Strahl, so schneidet er C_4^3 in dem dem a involutorisch entsprechenden Punkte a'.

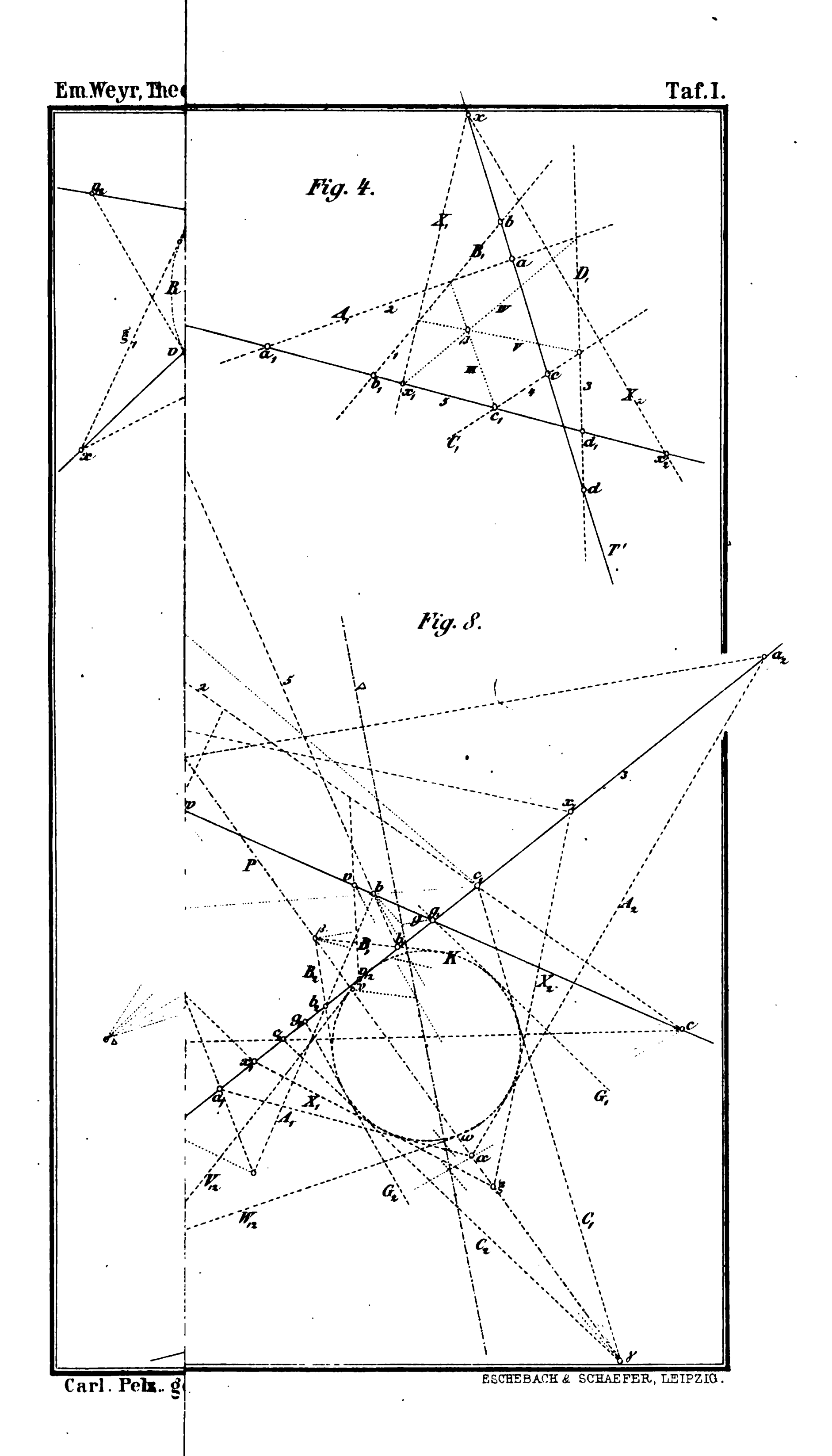
Der durch O, δ, a und a' gelegte, die Curve C_4^3 in a berührende Kegelschnitt S wird sie in diesem Punkte oskuliren.

Wir überlassen es dem Leser, die analoge Betrachtung und Construction für Curven dritter Classe mit einer Doppeltangente durchzuführen.

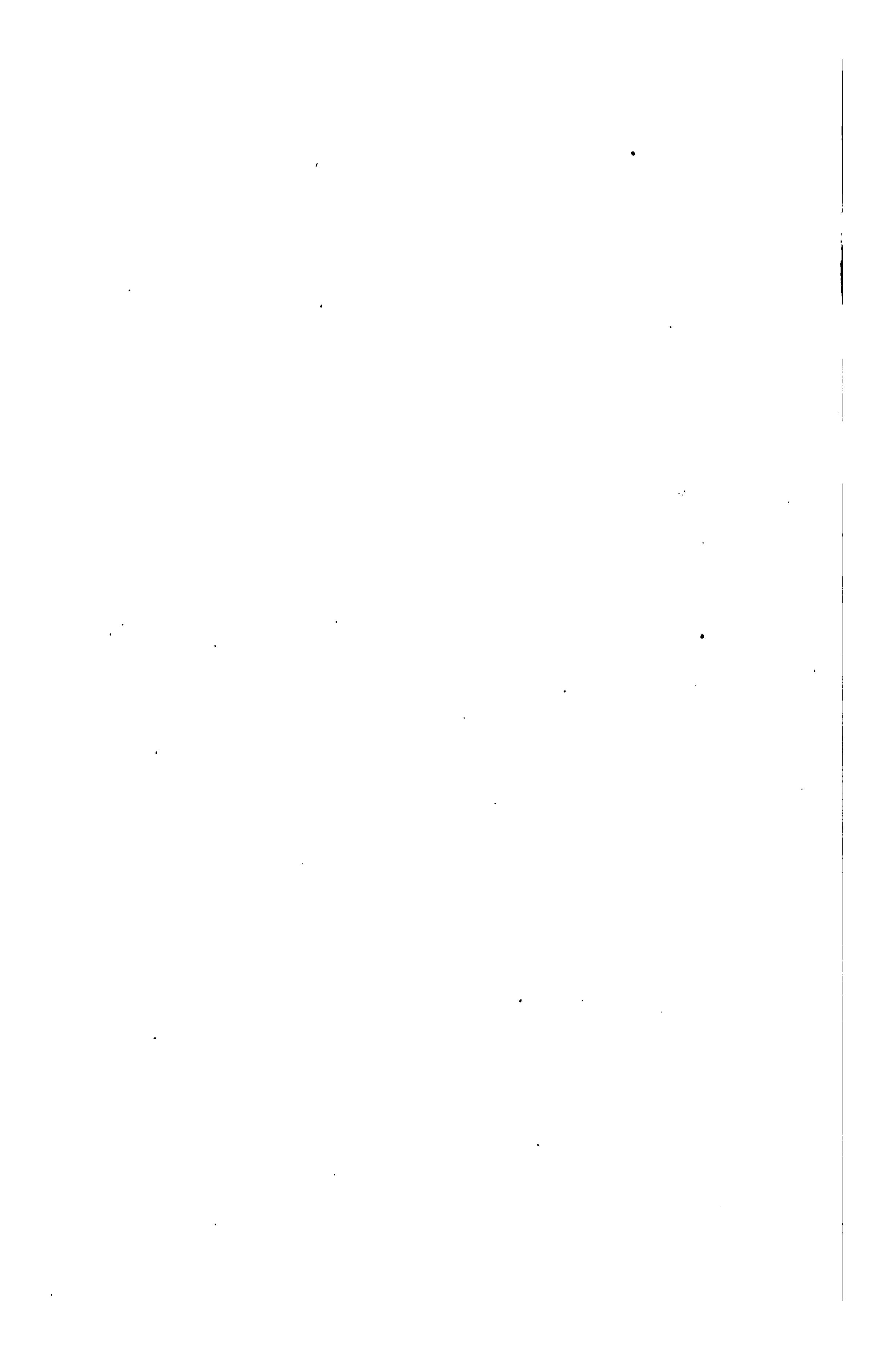
Druckfehler-Verzeichniss.

Seite		Zeile		von		lies:	
Seite	4	Zeile	9	von	unten	lies:	„Gebilde G und G'“ statt „Elemente G und G'“.
„	6	„	2	„	„	„	„jenes“ statt „jedes“.
„	7	„	11	„	„	„	„Führt“ statt „Führ“.
„	8	„	1	„	„	„	„von ξ“ statt „von ξ'“.
„	23	„	14	„	oben	„	„gesuchten“ statt „gesuchsen“.
„	24	„	4	„	unten	„	„mittelst“ statt „mittslst“.
„	32	„	20	„	oben	„	„X“ statt „χ“.
„	34	„	9	„	„	„	„durch“ statt „purch“.
„	34	„	30	„	„	„	„zweideutigen“ statt „eindeutigen“.
„	36	„	18	„	„	„	„x_1“ statt „x“.
„	39	„	4	„	„	„	„E“ statt „F“.
„	42	„	18 u. 20	von	oben	„	„v_{12} ω_{12}“ statt „v_{12} w_{12}“.
„	44	„	25	„	„	„	„X_1“ statt „x_1“.
„	52	„	7	„	„	„	„D^1“ statt „D“.
„	52	„	12 u. 13	„	„	„	„D_1^1“ statt „D_1“.
„	52	„	12 u. 16	„	„	„	„D_2^1“ statt „D_2“.
„	62	„	15	„	unten	„	„d^2“ statt „d_2“.
„	72	„	4	„	„	„	„zweideutigen“ statt „eindeutigen“.
„	100	„	9	„	„	„	„Doppeltangente“ statt „Doppeltangenten“.
„	106	„	8	„	oben	„	„Classe“ statt „Classe,“.
„	123	„	9	„	„	„	„S“ statt „R“.


Fig. 4.
Fig. 8.



Carl. Pelz. g[...] ESCHEBACH & SCHAEFER, LEIPZIG.



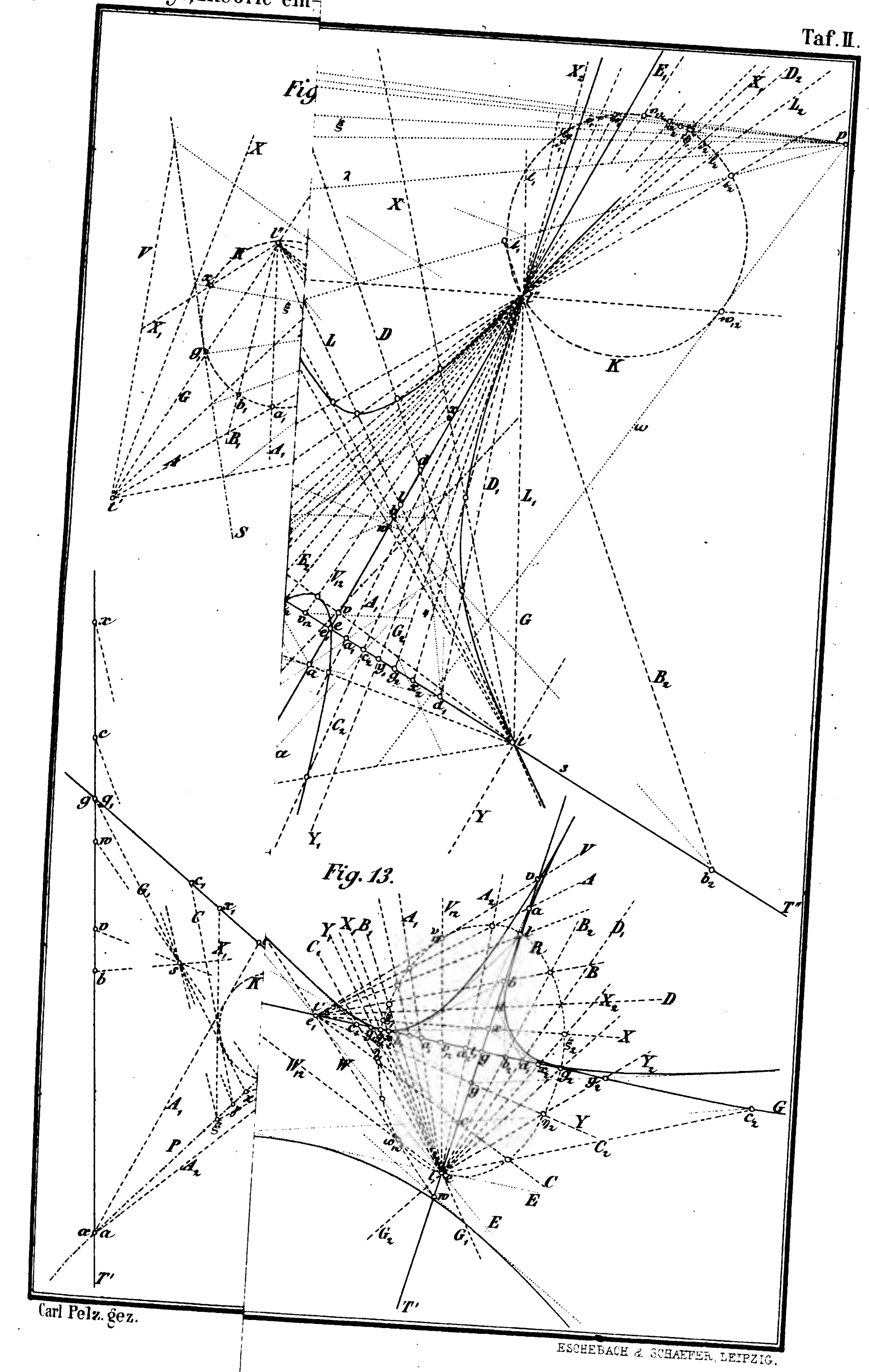
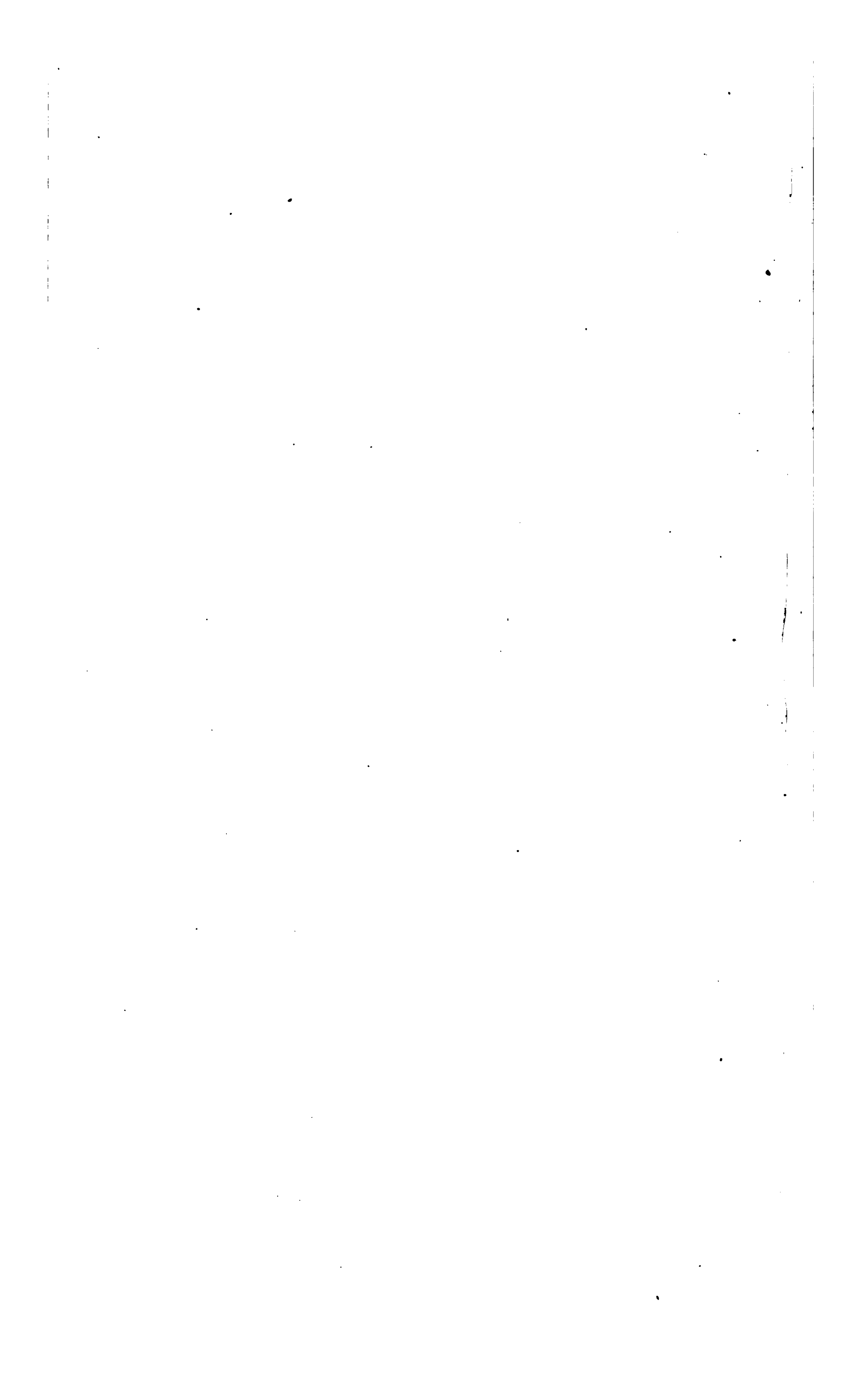


Fig. 13.

Carl Pelz. gez.

ESCHEBACH & SCHAEFER, LEIPZIG.



Fig

ig. 25.

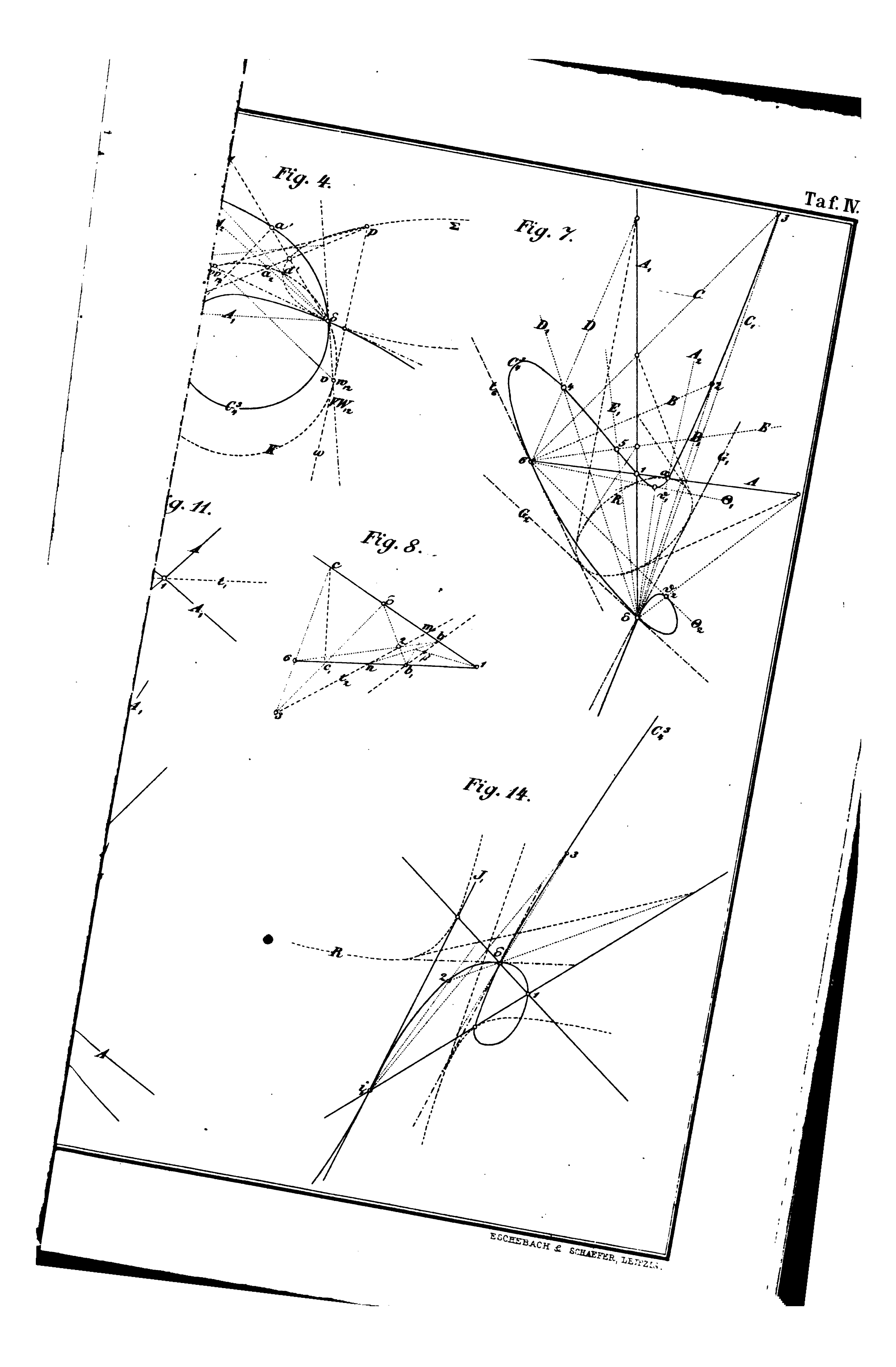
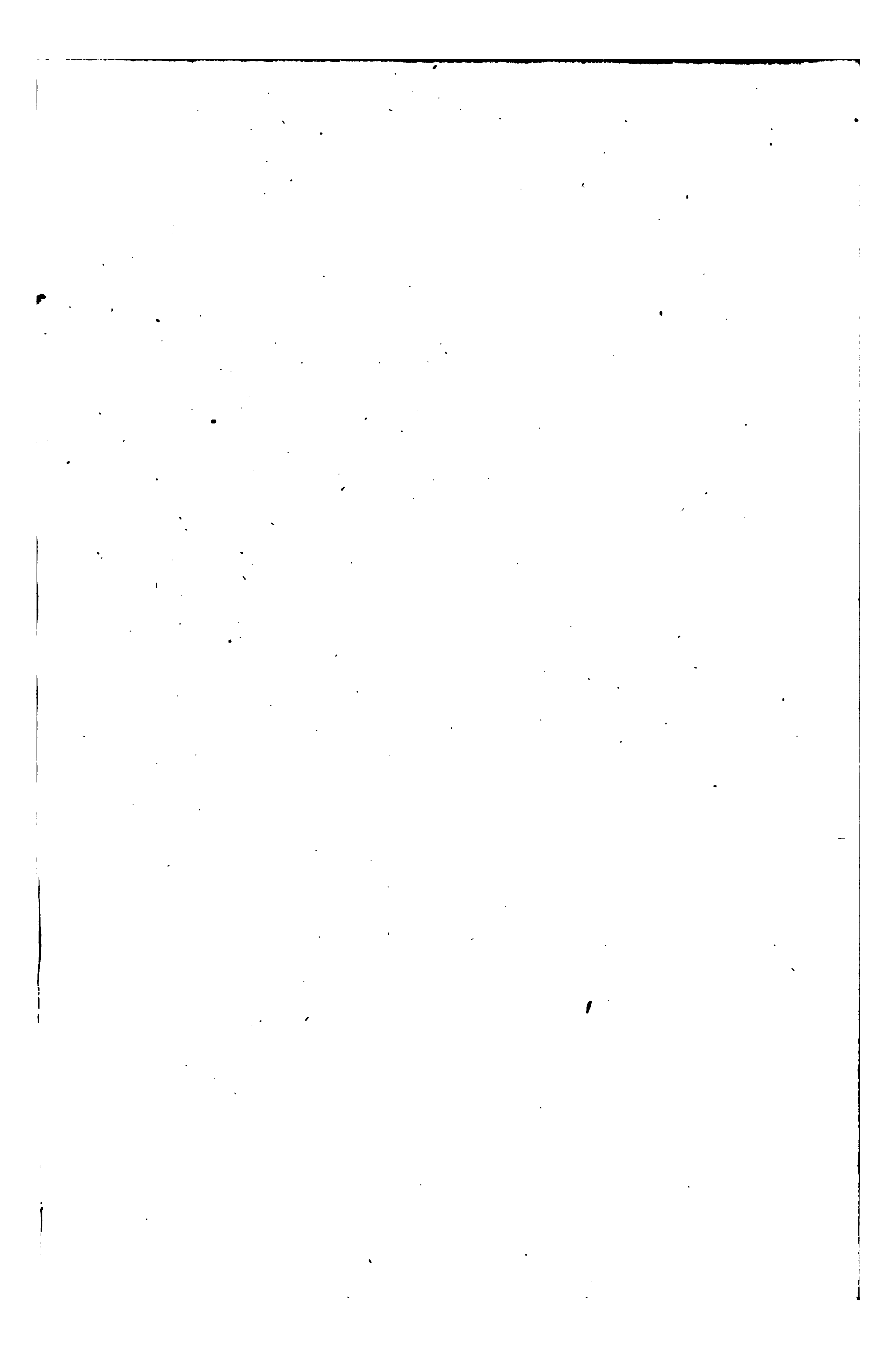

Taf. IV.
Fig. 4.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 11.
Fig. 14.
ESCHEBACH & SCHAEFER, LEIPZIG.

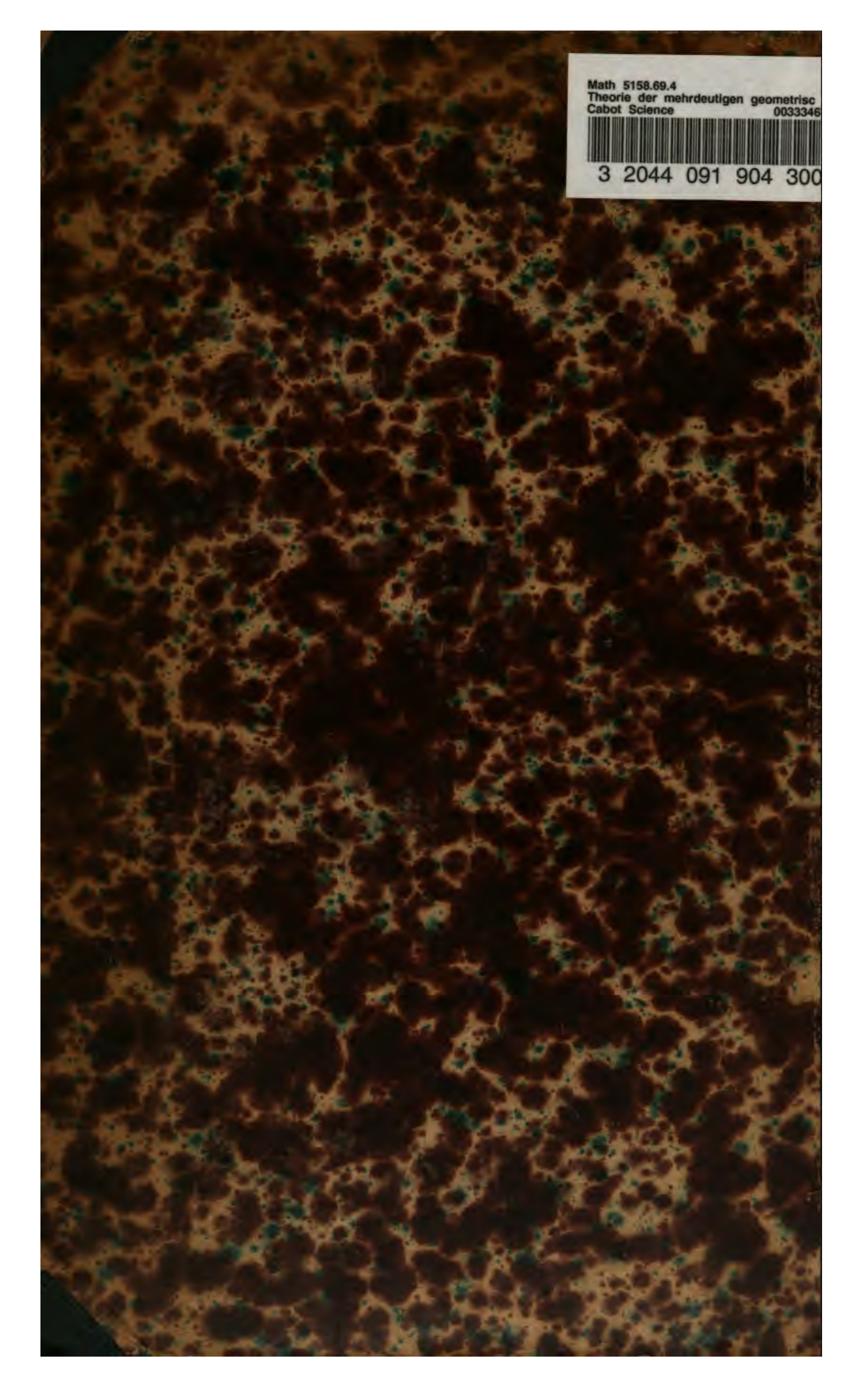
Fig. 21.

Fig. 15.

Fig. 17.

Fig. 24.




Math 5158.69.4
Theorie der mehrdeutigen geometrisc
Cabot Science 0033346
3 2044 091 904 300